



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

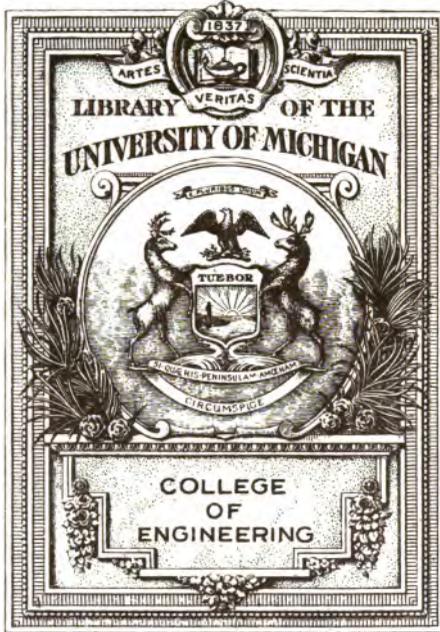
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



OTTO HARRASSOWITZ
BUCHHANDLUNG
LEIPZIG

ENGINEERING

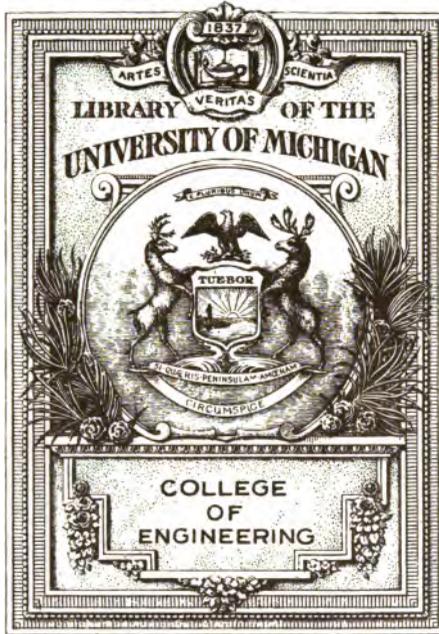
LIBRARY

TC

171

W42

X 782



OTTO HARRASSOWITZ
BUCHHANDLUNG
LEIPZIG

ENGINEERING

LIBRARY

TC

171

W42

X 782



Neue Grundlagen
der
technischen Hydrodynamik

Von
Dr.-Ing. L. W. Weil

Mit 133 Abbildungen im Text



München und Berlin 1920
Druck und Verlag von R. Oldenbourg

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten
Copyright 1920 by R. Oldenbourg, Munich

Vorwort.

Geheimnisvoll am lichten Tag
Läßt sich Natur des Schleiers nicht berauben,
Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag
Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit
Schrauben. Goethe.

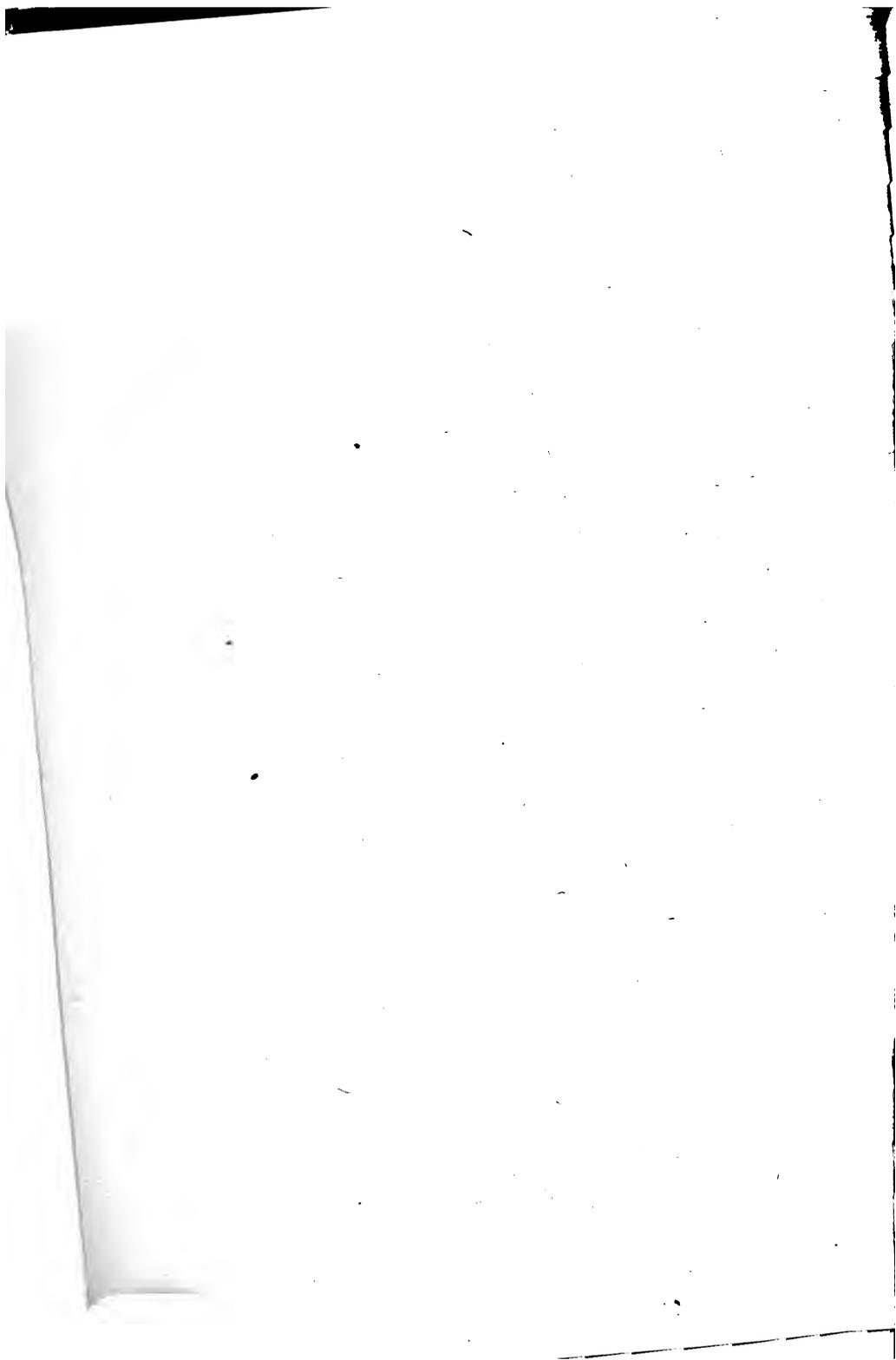
Das vorliegende Buch ist während mehrjähriger Kriegs- gefangenschaft entstanden. Bei der Behandlung der für Praxis und Wissenschaft gleichbedeutsamen, seit langer Zeit zur Dis- kussion stehenden Probleme war dem Verfasser neben seinen eigenen Erfahrungen, Studien und Versuchsergebnissen bloß eine geringe Anzahl von Werken der Fachliteratur zugänglich. Dies bedingte eine weitgehende Selbständigkeit und Ursprüng- lichkeit in der Entwicklung der Gedankengänge, die verbunden mit restlos vertiefter Naturbetrachtung, nach mühevoller, aber auch unsäglich genußreicher Arbeit das Ziel erreichen ließen.

Möge denn das Buch als ein Stück praktischer Natur- erkenntnis zu neuer Forschung anregen und viele Freunde finden.

Nürnberg, 15. März 1920.

L. W. Weil.

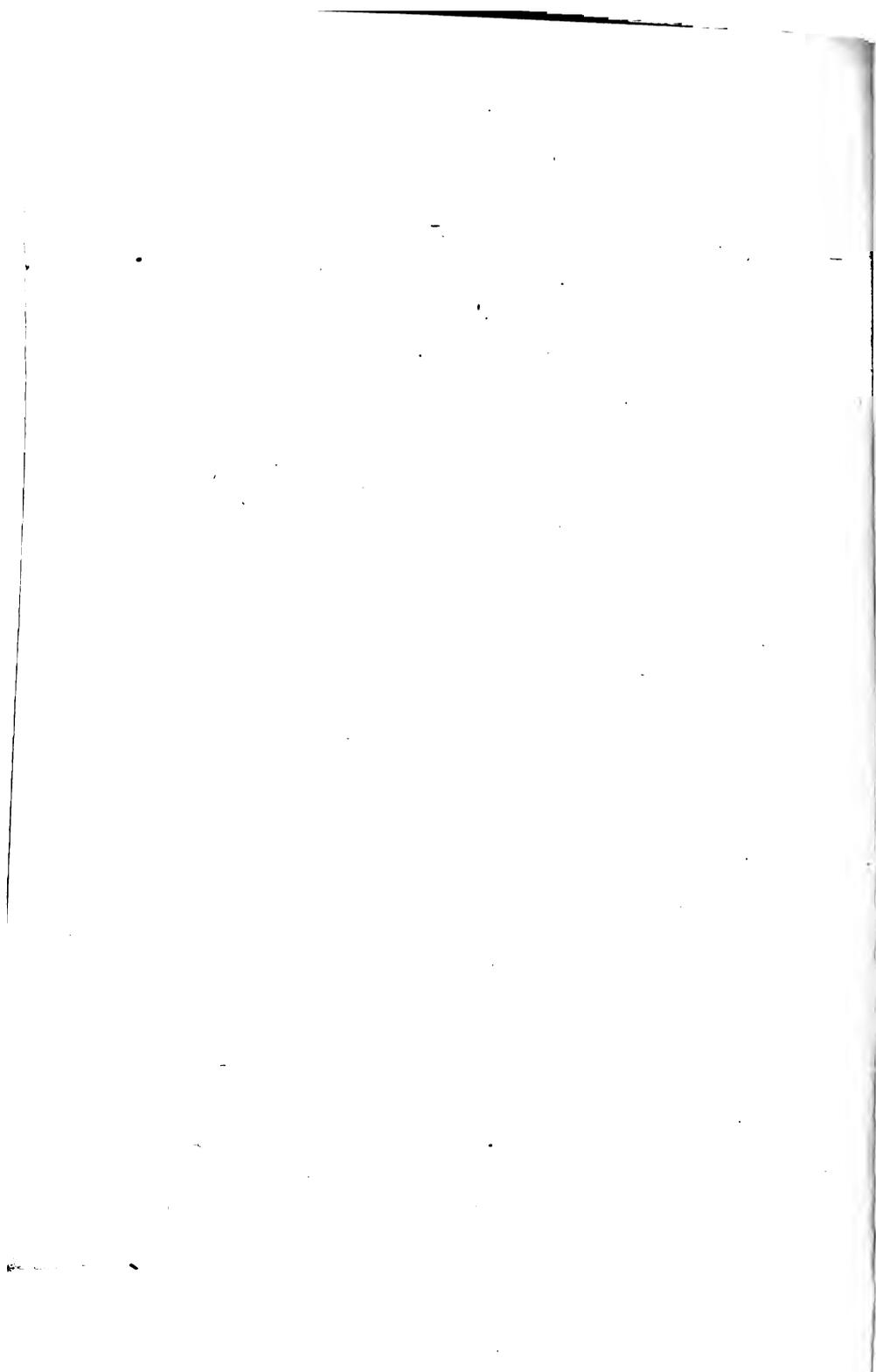
Reichmann 12-9-40 711/27



Engin.
Herr.
9-2-26
13190

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Abschnitt:	
Die Strömung in Röhren, Kanälen, Stollen, Flußläufen usw.:	
Die Turbulenz	9
II. Abschnitt:	
Die Strömung in verengten bzw. erweiterten Kanälen .	48
III. Abschnitt:	
Das Ausfluß- und Mündungsproblem	75
IV. Abschnitt:	
Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit:	
1. Theoretische Grundlagen	98
2. Versuchsergebnisse zum Probleme der kreisenden Flüssigkeit	114
V. Abschnitt:	
Der hydraulische Stoß	144
VI. Abschnitt:	
Die Kreisräder:	
A) Die Theorie der Kreisräder	178
B) Versuche zur Theorie der Kreisräder	202



Einleitung.

Die moderne Hydrodynamik hat bisher, trotz ihrer mannigfaltigen Bemühungen, für zahlreiche Strömungsprobleme der tropfbaren bzw. gasförmigen Flüssigkeiten, wie z. B.: die Strömung kreisender Flüssigkeit, die Turbulenz, das Ausflußproblem, den hydraulischen Stoß u. v. a., noch keine exakte Erklärung bzw. analytische Lösung zu finden vermocht. Und doch handelt es sich hierbei um Flüssigkeitsströmungen von größter wissenschaftlicher und wirtschaftlicher Bedeutung, die, durch Potentialkräfte ausgelöst, in ihrer mannigfaltigen Form u. a. die Wirkung unserer Kreislräder. (Turbomaschinen), i. e. der Wasserturbinen, Dampfturbinen, Turbinenpumpen bzw. -gebläse, des Schiffs- und Luftschrauben, bedingen, und deren Erkenntnis uns auch auf anderen Gebieten der Wissenschaft weitgehend-Aufschlüsse zu geben vermöchte. Dieser unbefriedigende Zustand hat wohl seinen hauptsächlichsten Grund darin, daß einerseits eine Verfolgung der tatsächlichen bei solchen Strömungen auftretenden Vorgänge an Hand geeigneter Versuche mit großen praktischen Schwierigkeiten verknüpft ist, andererseits die rein theoretische Behandlung des Gegenstandes auf große, oft unüberwindliche, mathematische Schwierigkeiten stößt, so daß sich die Begründer der einschlägigen Theorien gezwungen sehen, für die Berechnung vereinfachende, oft ganz willkürliche Annahmen über den Strömungsverlauf zu machen, deren Richtigkeit meist auch durch den wissenschaftlichen Versuch nicht mit Sicherheit nachgeprüft werden kann.

Dieser Mangel an gesicherten Grundlagen hat dazu geführt, daß die praktische Hydraulik bzw. Hydrodynamik, für welche die spekulative Behandlung der Probleme mit Hilfe der hydrodynamischen Grundgesetze zu schwierig und zeitraubend ist, ihre mathematischen Beziehungen und Zusammenhänge fast ausschließlich aus der praktischen Erfahrung auf rein empirischem

Wege gewinnt, und das Feld der wissenschaftlichen Bearbeitung derselben vollständig den Theoretikern überläßt, zumal durch den großen praktischen Erfolg der empirischen Formulierung das Fehlen einer exakten wissenschaftlichen Erklärung der Strömungserscheinungen nicht allzu störend empfunden wird. Dem Theoretiker hingegen mangelt in vielen Fällen die reale Auffassung, die nur durch jahrelangen innigen Kontakt mit der lebendigen Erscheinung des Problem es erworben werden kann. Er ist daher leicht geneigt, sich von rein mathematischen Erwägungen leiten zu lassen, die für ein und dasselbe Problem oft zu ganz divergierenden Anschauungen und Ergebnissen führen. Hier sei als Beispiel bloß das Problem der kreisenden Flüssigkeit (Kreiselradtheorie) herausgegriffen, das neuerdings von verschiedenen Forschern, wie Zeuner¹⁾, Lorenz²⁾, Prašil³⁾, v. Mises⁴⁾, eine vollkommen verschiedenartige Bearbeitung erfuhr und zu heftiger wissenschaftlicher Polemik Anlaß gab, ohne daß dadurch allgemein anerkannte Richtlinien für seine Behandlung geschaffen wurden.

Gegen diese allzu formale Bearbeitung des Gebietes wurden bald gewichtige Warnungen laut. Namentlich waren es die Meister der deutschen Wasser- und Dampfturbinentechnik, Pfarr⁵⁾, und Stodola⁶⁾, die sich wie folgt, äußerten:

A. Pfarr: ».....« So wenig wir der mathematischen Behandlung entraten können, so sehr muß vor einer nur analytischen Erörterung der Vorgänge gewarnt werden, die hier und da geradezu das freie Erkennen der sachlichen Umstände beeinträchtigt. Wir haben es beim Durchströmen der Schaufelgefäße immer mit körperlichen, physikalischen Vorgängen zu tun, die direkt oder indirekt beobachtet sein wollen, bei denen die rein logische Schlußfolgerung versagt, weil wir weitaus noch nicht alle »Entscheidungsgründe« kennen.....«

¹⁾ G. Zeuner, Vorlesungen über Theorie der Turbinen, Leipzig 1899.

²⁾ H. Lorenz, Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder, München 1911.

³⁾ F. Prašil, Die Bestimmung der Kranzprofile und der Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen, Schweizerische Bauzeitung 1906, Heft 23 — 25.

⁴⁾ R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908.

⁵⁾ A. Pfarr, Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb, Berlin 1910.

⁶⁾ A. Stodola, Die Dampfturbinen, Berlin 1910.

A. Stodola: ».....Belasten wir uns mit zu viel von den Feinheiten der Funktionentheorie, so verdeckt diese, wie eine dunkle Wolke, den freien Blick; die geistige Frische und die Freiheit des Gedankenspielen, die ebenso zu schöpferischen Taten, wie zur Wahrnehmung kleinerer, naheliegender Vorteile erforderlich sind, gehen verloren..... Wir bleiben an den Fußangeln einer unlösbaren Differentialgleichung hängen, während draußen reiches Leben flutet und neue Erfindungskeime sproßen.....«

Stodola, Pfarr und in neuerer Zeit Bánki sind es denn auch, die mit ihren, in der Hauptsache auf Beobachtung und Erklärung der tatsächlich auftretenden Strömungserscheinungen beruhenden Arbeiten neue Anregung für die Erforschung des Problemens der kreisenden Flüssigkeit brachten. Während Stodola und seine Mitarbeiter die Strömung von Gasen und Dämpfen durch Düsen und gekrümmte Kanäle zum Gegenstand ihrer Untersuchungen machten, führte Pfarr, 1910, aus den Mitteln der Jubiläumstiftung der deutschen Industrie, geistreiche Versuche über die Druckverteilung in den Zellen arbeitender Reaktions- (Wasser-) Turbinen aus. Dieselben ergaben in unzweideutiger Weise die praktische Unzulässigkeit der Lorenzschen Annahmen achsensymmetrischer Strömung, gleichmäßiger Verteilung von Druck und Geschwindigkeit längs eines Parallelkreises und gleicher Energieumsetzung sämtlicher Elemente der in der Turbine zur Wirkung gelangenden Arbeitsflüssigkeit. Pfarr, der an, aus der älteren Literatur übernommenen Anschauungen über die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung im kreisenden Wasser festhielt, zog aus den Resultaten seiner Versuche keine weitgehenden Schlußfolgerungen. Zweifellos aber gaben diese inzwischen veröffentlichten Versuchsergebnisse¹⁾ die Anregung zu den Versuchen Bánkis, der die Lösung der Probleme auf ganz neuen Wegen suchte.

Bánkis ersten Veröffentlichungen über den »Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit«²⁾ folgte die Wiedergabe der

¹⁾ A. Pfarr, Versuche über die Druckverteilung etc., Z. V. D. I 1910, Seite 1421.

²⁾ D. Bánki, Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit, Z. V. D. I. 1911, S. 1215 u. S. 1733.

³⁾ Derselbe, Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit, Z. V. D. I. 1913, S. 17.

Ergebnisse seiner im Maschinenlaboratorium der Technischen Hochschule zu Budapest durchgeführten sinnreichen Versuche über die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der im rechteckigen Krümmer kreisenden Flüssigkeit²⁾). Bänki fand dabei seine Vermutung bestätigt, daß die Bernoullische Energiegleichung, die besagt, daß für einen Stromfaden die Summe der potentiellen (Druck-) und kinetischen (Geschwindigkeits-) Energien jedes Flüssigkeitselementes des Stromfadenquerschnittes unter allen Umständen konstant sein müsse, für die Strömungsverhältnisse im Krümmer ihre absolute Gültigkeit verliert, bzw. daß hierbei die durch zusätzliche Potentialkräfte — die Fliehkräfte des kreisenden Wassers — erzeugten Massendrücke die relative Gesamtenergie der strömenden Flüssigkeit nicht erhöhen. Auf Grund der aus den Ergebnissen seiner Versuche gewonnenen Strombilder erklärt Bänki den Strömungsvorgang als Wechselwirkung zweier Scharen von Stromelementen, die er als »Verdränger« und »Verdrängte« bezeichnet und denen er pumpen- bzw. turbinenartige Wirkungen zuschreibt, ohne indessen auf eine Analyse dieser Erscheinungen näher einzugehen. Wenngleich mit dieser Arbeit die ältere Theorie der Parallelströmung im Krümmer als überwunden betrachtet werden konnte, war mit ihr doch noch keine brauchbare Grundlage für ein neues Strömungsgesetz gegeben.

Inzwischen hatte der Verfasser einige im Laufe seiner beruflichen Tätigkeit immer wiederkehrende Strömungsprobleme, wie: Ausfluß von Dampf, Luft und Wasser durch Düsen und einfache Mündungen, Stoß von Flüssigkeitsstrahlen gegen feste Wände und gegen einander u. a. m., in vielen Versuchen beobachtet und studiert, da die in der Literatur darüber gemachten Angaben mit manchen der praktischen Erfahrungen nicht im Einklange zu stehen schienen. Diese Arbeiten, für die allerdings im Drange der übrigen beruflichen Pflichten kein zusammenhängendes Programm aufgestellt werden konnte, brachten den Verfasser immer mehr zur Ansicht, daß das Problem des im Krümmer kreisenden Wassers bloß ein Sonderproblem der bei Ausfluß bzw. Mündung von Flüssigkeitsstrahlen auftretenden Strömungen darstellt. Das Studium der vorerwähnten Arbeiten Stodolas, Pfarrs und Bänkis trug wesentlich zur Vertiefung dieses Gedankens und zur allgemeinen Anwendung seiner Folgerungen auf die Kreisradtheorie bei.

Hand in Hand mit der Entwicklung dieser Theorien ergaben sich Theorien der turbulenten Strömungen in Rohren und offenen Wasserläufen bzw. in verengten und erweiterten Kanälen, ferner Grundlagen für die Erklärung und analytische Behandlung des hydraulischen Stoßes und anderes mehr. Die Behandlung des Gegenstandes ging dabei stets von der plastischen Vorstellung der kinetischen Erscheinung aus und wurde, falls mathematische Schwierigkeiten dies nicht unmöglich machten oder der praktischen Anwendung des Ergebnisses elementarere Methoden der Ableitung genügten, auf Grund der hydrodynamischen Grundgleichungen durchgeführt. Immer aber bildete die qualitative und quantitative Übereinstimmung der Ergebnisse der theoretischen Betrachtung mit der praktischen Erfahrung Anfang und Ende der ausgeführten Untersuchungen.

Die nachfolgenden Arbeiten sind indessen nicht als abgeschlossene Forschungen, sondern bloß als Grundlagen aufzufassen, auf denen die behandelten Gebiete und viele hier nicht behandelte Gebiete der Hydro- und Thermodynamik nach neuen Gesichtspunkten ausgebaut werden sollen.

Die im I. Abschnitte behandelte turbulente Strömung gibt ein anschauliches Bild des Angriffes und der gesetzmäßigen Wirkung der hydraulischen Reibungskräfte. Die sogenannte kritische Geschwindigkeit ist mit einer Ablösung der Grenzschichten der Strömung von den Begrenzungswänden verbunden. Die Pulsationsbewegung der turbulenten Strömung dient der Übertragung von Energie aus dem Strominnern nach den die Reibungskräfte von den Begrenzungswänden an die übrige Flüssigkeit übermittelnden Grenzschichten. Die von zahlreichen Forschern aufgestellten empirischen Formeln für den Reibungsverlust finden hier ihre natürliche Begründung. Bei der Strömung in Flußläufen usw. bewirkt die Pulsationsbewegung in Verbindung mit der Luftreibung eine geringe Verschiebung der Höchstgeschwindigkeit im Stromprofile unter die Stromoberfläche.

Im II. Abschnitte findet die Zentralströmung auf Grund der Ergebnisse neuerer Versuche ihre theoretische Erklärung. Die einander zugeordneten Reibungs- und Loslösungsverluste ergeben einen Mindestverlust für bestimmte Erweiterungswinkel, deren Größe selbst wieder von der Wandrauhigkeit und der Größe des Erweiterungsverhältnisses abhängig ist. Erweiterungswinkel $2\alpha_0 > 40^\circ$ ergeben einen Verlust, der größer ist als der bei plötz-

licher Querschnittsänderung ($2\alpha_0 = 180^\circ$). $2\alpha_0 = 40^\circ$ ist daher als ein kritischer Erweiterungswinkel aufzufassen. Daraus lassen sich einige Konstruktionsregeln für das geradachsige erweiterte Turbinensaugrohr ableiten.

Der III. Abschnitt ist der Betrachtung des Ausflußproblems gewidmet. Durch die Einführung des Begriffes vom Geschwindigkeitsvolumen werden die verwickelten Strömungs- und Kontraktionsverhältnisse der Vorstellung zugänglich, die sich an einen von Newton (1687) ausgesprochenen Gedanken anschließt. Neben der Berechnung von Kontraktionszahlen verschiedener Formen von Ausflußöffnungen ergeben sich Erklärungen für die Erscheinung der Strahlreaktion sowie der in Ausflußgefäßen, Turbinenkammern usw. beobachteten Strudelbildung bzw. Maßnahmen zur Beseitigung der letzteren.

Die Erkenntnis der Wirkungslosigkeit der bei Ausfluß eingeschürter Strahlen auftretenden Ablenkungsdrücke (Zentrifugaldrücke) der kreisenden Flüssigkeit in bezug auf den relativen Energieinhalt der letzteren bildet die Grundlage der im IV. Abschnitt in Anlehnung an neuere Ideen Bänkis entwickelten Theorie der Strömung im Krümmer. Nach Feststellung der Unanwendbarkeit der Bernoullischen Energiegleichung für die im Kraftfelde der Fliehkraft vollzogene Strömung im Krümmer, führt die für möglichst verlustlose Strömung aufgestellte Forderung gleicher Stromgeschwindigkeit in jedem Krümmerquerschnitt mit der Bedingung $\frac{w_0^2}{\rho} = \text{konst.}$ auf eine analytisch festgelegte günstigste Krümmerform. Die Verhältnisse im Kreiskrümmer ergeben ungleiche Geschwindigkeitsverteilung im Krümmerquerschnitte, Wirbelräume an der Innenseite des Strahles unter Loslösung des letzteren und große Krümmerverluste. Die Strömung umfaßt hier zwei Scharen von Stromelementen von denen die einen — von außen nach innen — unter Düsenwirkung, die anderen — von innen nach außen — unter Diffuserwirkung stehen. Die Versuche Bänkis bestätigen die theoretischen Ableitungen. Die analytische Berechnung des günstigsten Krümmungsverhältnisses für Rohrkrümmer steht mit den Ergebnissen der Versuche von Saph und Schoder in voller Übereinstimmung. Die Versuche des Verfassers erweisen die Überlegenheit des theoretisch abgeleiteten Kurvenkrümmers gegenüber dem Kreiskrümmer hinsichtlich des Krümmerverlustes.

Der V. Abschnitt umfaßt die Erscheinungen, die beim sogenannten hydraulischen Stoße auftreten. Es ergibt sich die Stromliniengleichung des an einer ebenen festen Wand abgelenkten Strahles ohne und mit Reibung, die Verhältnisse bei schief auftreffendem, begrenztem und freiem Strahl, der Stoßverlust bei plötzlicher Querschnittsänderung und beim Zusammentreffen zweier Ströme gleicher Richtung und ungleicher Geschwindigkeit. Der »Mechanismus« des Loslösungsverlustes findet seine Erklärung. Die Theorie liefert zwanglos Beziehungen für die Strömung im rechtwinkligen Knie, Doppel-T, —Y—, und ähnlichen Rohrverbindungsstücken, ferner für die Durchströmung von Knien mit Totraum und für das allgemeinste Problem des Zusammentreffens zweier Ströme von verschiedener Richtung und verschiedener Geschwindigkeit, unter Berücksichtigung der jeweilig günstigsten Querschnitts-, Neigungs- und Geschwindigkeitsverhältnisse.

Der Umriss einer neuen Kreiselradtheorie auf Grund der in den vorangehenden Abschnitten gewonnenen Erkenntnisse bildet den Gegenstand des VI. Abschnittes. Der vom Wasser durchströmte Absolutkanal ist nichts anderes als ein erweiterter Krümmer, so daß alle vorkommenden Fragen, auch die des nicht stoßfreien Betriebes, mit Hilfe der bisher angestellten Studien ihre sachliche Lösung finden können. Neben der günstigsten Krümmerform für die ortsfesten Leitzellen und Saugrohrkrümmer, ergibt sich die günstigste Form des Absolutkrümmers, bzw. der auf die Relativform zurückgeführten Laufradschaufeln. Der Momentensatz und das Drehmoment finden nach der neuen Darstellung eine anschauliche Erklärung. Nach einem Hinweis auf die periodische Störung des Strömungszustandes durch die Wirkung der Leitschaufelenden, sind die Verhältnisse bei nicht stoßfreiem Gang in den Hauptpunkten behandelt und die Sätze für den Verwendungsbereich eines Turbinenmodelles erörtert. Die Versuche des Verfassers an erweiterten Krümmern bestätigen die theoretischen Erwägungen über deren relativen Gütegrad der Energieumsetzung. Die Ergebnisse der Versuche Pfarrs, im Lichte der theoretischen Ableitungen betrachtet, bilden einen lückenlosen Beweis für die Richtigkeit der Grundlagen der neuen Theorie. Sie gestatten gleichzeitig einen ausgezeichneten und tiefen Einblick in den »Mechanismus« der Strömung und der Energieabgabe des Betriebswassers einer Turbine bei stoßfreiem und nicht

stoßfreiem Betriebe und weisen den Weg zur Entwicklung der hochwertigsten Wasserkraftmaschinen, Kreiselpumpen und Schiffsschrauben.

Der Verfasser möchte die vorliegenden Ausführungen nicht schließen, ohne aller jener Forscher auf gleichen Gebieten zu gedenken, deren Arbeiten auf manchen dunklen Wegen hilfreiche Wegweiser waren. Insbesondere gilt das von den Herren Pfarr und Bánki, deren Veröffentlichungen er die ersten Anregungen und späterhin die nachhaltigste Unterstützung in der Ausführung der vorliegenden Arbeiten verdankte.

I. Abschnitt.

Die Strömung in Röhren, Kanälen, Stollen, Flußläufen usw.: Die Turbulenz.

Strömt eine zähe, d. h. reibungs- und wirbelbehaftete Flüssigkeit durch ein gerades zylindrisches Rohr, so sind drei Bewegungszustände möglich.

1. Parallelströmung: Die äußersten Flüssigkeitselemente haften an der Rohrwand, die Geschwindigkeit nimmt von hier bis zur Rohrachse parabolisch zu (Fig. 1). Die mittlere Geschwin-

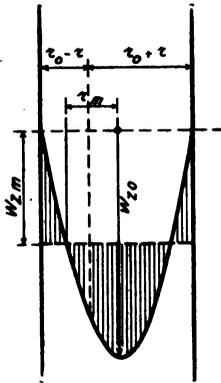


Fig. 1.

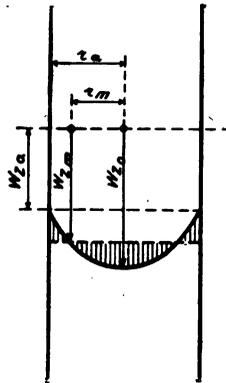


Fig. 2.

digkeit ist gleich der halben Höchstgeschwindigkeit, der Druckhöhenverlust durch (innere) Reibung ist der mittleren Geschwindigkeit direkt linear, dem Rohrdurchmesser umgekehrt quadratisch proportional¹⁾.

2. Turbulente Strömung: Die Strömung ist im allgemeinen von intensiver Wirbelbildung begleitet, die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt ist nicht mehr parabolisch (Fig. 2). Die äußersten Flüssigkeitsteilchen haften nicht an

¹⁾ H. Lorenz, Technische Hydromechanik 1910, S. 422f.

der Rohrwand, der Druckhöhenverlust ist der mittleren Geschwindigkeit direkt quadratisch, dem Rohrdurchmesser umgekehrt linear proportional.

3. Zwischen beiden Gebieten liegt eine Übergangszone, in welcher kein stabiler Bewegungszustand möglich ist, und die Strömung zwischen Turbulenz und Parallelströmung pendelt.

Das Auftreten dieser Bewegungszustände ist an ein gewisses Verhältnis von Rohrdurchmesser, Strömungsgeschwindigkeit und Zähigkeitskoeffizienten der Flüssigkeit gebunden, das von O. Reynold¹⁾ nach Versuchen bestimmt wurde zu

$$\frac{\omega_k \cdot D \cdot \gamma}{\eta \cdot g} = C \quad (1)$$

Hierbei bedeutet ω_k die kritische Geschwindigkeit in m/Sek., D den Rohrdurchmesser in m, γ das spezifische Gewicht in kg/cbm, η den Zähigkeitskoeffizienten, der seinerseits von der Flüssigkeitstemperatur abhängig ist, in kg/m, g die Erdbeschleunigung in m/Sek.², und C eine Konstante (≈ 2000).

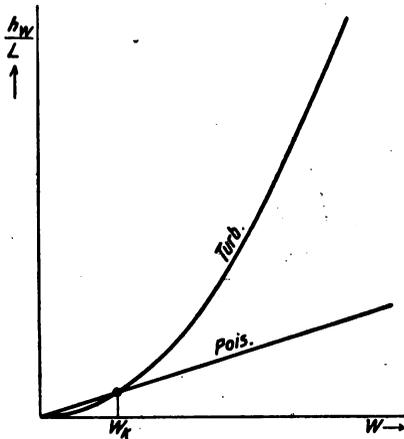


Fig. 3.

Die kritische Geschwindigkeit scheidet die Gebiete der Parallelströmung und Turbulenz gemäß dem Diagramme (Fig. 3), in welchem die Kurven eingezeichnet sind, die dem durch die Reibung verursachten Druckhöhenverluste pro Längeneinheit des Rohres in beiden Gebieten entsprechen.

Häufig spricht man auch von einer oberen und unteren kritischen Geschwindigkeit und bezeichnet das zwischen diesen beiden liegende Strömungsgebiet als die unter 3. erwähnte Übergangszone. Die untere kritische Geschwindigkeit ist demnach jene bis zu welcher das reine Poisenille'sche Widerstandsgesetz, die obere kritische

¹⁾ O. Reynold, Papers on Mechanical and Physical Subjects, Cambridge 1901, Vol. II, p. 51f.

Geschwindigkeit jene, von welcher ab bloß die quadratische Geschwindigkeitsbeziehung gültig ist.

Die von Stokes, Poiseuille und anderen begründeten Gesetze der Parallelströmung zäher Flüssigkeiten finden sich in den meisten Lehrbüchern der Hydromechanik behandelt, so daß wir hier nicht näher auf dieselben einzugehen brauchen.

Weit größeres wissenschaftliches und technisches Interesse besitzt die turbulente Strömung, da ihr die meisten der in der Natur und Technik vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen zugehören. Sie ist daher auch der Gegenstand vieler Versuche und Untersuchungen seitens zahlreicher Forscher wie O. Reynold¹⁾, Lord Rayleigh²⁾, Boussinesq³⁾, H. A. Lorentz⁴⁾ u. a. geworden, ohne bisher eine exakte hydrodynamische Erklärung bzw. analytische Formulierung gefunden zu haben. Im nachfolgenden soll der Versuch gemacht werden, eine Darstellung der Turbulenz nach neueren Anschauungen des Verfassers zu geben.

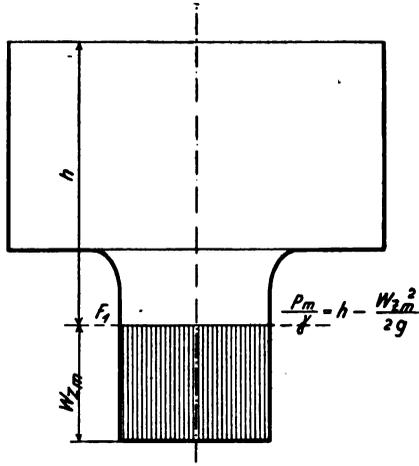


Fig. 4.

Wir denken uns, ein Flüssigkeitsstrom fließe, gemäß Fig. 4, aus einem Behälter unter der Druckhöhe h (in Metern) durch eine gut abgerundete Öffnung in ein zylindrisches Rohr aus. Wir nehmen an, daß die Zuströmung reibungslos erfolge, so daß nach erfolgter Ablenkung der Flüssigkeitsfäden, über den ganzen Rohrquerschnitt F_1 am Eintritte, in jedem Punkte die gleiche Geschwindigkeit w_m , die gleiche ($z =$) Richtung der Parallelströmung

¹⁾ O. Reynold, a. a. O.

²⁾ Lord Rayleigh, Scientific Papers, Cambridge 1902, Vol. I-V.

³⁾ Boussinesq, Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides, Paris 1907.

⁴⁾ H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig 1907.

und, von der Wirkung der Schwere abgesehen, auch der gleiche Druck $\frac{p_m}{\gamma}$ auftreten. Das Diagramm der Geschwindigkeitsverteilung ist dann ein Zylinder über dem Rohrquerschnitte von der Höhe ω_m .

Wenn wir nun das aus Versuchen bei turbulenter Strömung gewonnene Diagramm der ω_z -Komponenten der Geschwindigkeiten betrachten, so zeigt es in Fig. 2 ersichtliche Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt. Die Höchstgeschwindigkeit liegt in der Rohrachse und fällt gegen die Rohrwand längs der Oberfläche eines ellipsoidähnlichen Rotationskörpers ab. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt hierbei etwa 0,80 bis 0,83 ω_{z0} (wenn ω_{z0} die Höchstgeschwindigkeit bedeutet), die Geschwindigkeit längs der Rohrwand, ω_{za} , etwa 0,57 ω_{z0} . Wir können uns diese geänderte Geschwindigkeitsverteilung aus derjenigen der Parallelströmung derart entstanden denken, daß durch irgendeine Ursache die Flüssigkeitselemente eine Rotationskomponente angenommen haben, die von der Rohrwand gegen die Achse zu kleiner wird und in der Achse selbst verschwindet, so daß der dadurch bedingte Pressungszuwachs gegen die Rohrwand eine dem Diagramme (Fig. 2) entsprechende Geschwindigkeitsverteilung zur Folge hätte.

Wir wollen nun eine solche, durch das aus den Versuchen gewonnene Strömungsbild und durch unsere Überlegungen charakterisierte Strömung, unter vorläufiger Außerachtlassung der Ursache ihrer Entstehung und der Wirkung der Schwerkraft, als reibungsfrei, stationär bestehend betrachten und mit den hydrodynamischen Grundgleichungen zu beschreiben versuchen.

Die »Eulerschen Grundgleichungen« lauten für die achsensymmetrische, reibungsfrei stationäre Strömung in Zylinderkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} q_r - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= \omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \omega_z \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\omega_n^2}{r} \\ q_n \cdot r &= \omega_r \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial r} + \omega_z \cdot \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial z} \\ q_z - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \omega_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \omega_z \cdot \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial (\omega_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial (\omega_z \cdot r)}{\partial z} = 0 \quad \dots (3)$$

Bei unserer Strömung kann, mit

$$q_r = 0, \quad q_n = 0, \quad q_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \omega_r = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0,$$

(da sämtliche in der Richtung der z-Achse vom Auftreten der turbulenten Strömung an betrachteten Rohrquerschnitte identische Geschwindigkeitsverteilung aufweisen), im Innern des Querschnittes nur dann ein gegen die Achse abnehmender Druck auftreten, wenn die Flüssigkeit gemäß unserer Annahme eine Rotationskomponente der Geschwindigkeit aufweist. Das Druckgefälle ist nach der ersten der Gleichungen (2)

$$\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\omega_n^2}{r} \dots \dots \dots (4)$$

Über die Größe der Rotationskomponenten (ω_n) und deren Verteilung über den Querschnitt gibt uns die zweite der Gleichungen (2) Aufschluß.

Für Strömungen, die ein Geschwindigkeitspotential bzw. Potentialform besitzen, ist, gemäß den Ableitungen Prašils¹⁾,

$$\left. \begin{aligned} \omega_z \cdot r &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \omega_r \cdot r &= - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

wobei ψ die Stromfunktion für die betrachtete Strömung bedeutet. Mit den Gleichungen (5) und $q_n = 0$ geht die zweite der Gleichungen (2) über in

$$\omega_z \cdot \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial z} + \omega_r \cdot \frac{\partial \omega_n \cdot r}{\partial r} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = 0 \quad (6)$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn entweder ($\omega_n \cdot r$) = konstant ist über den ganzen Querschnitt bzw. im ganzen Bereiche der Strömung, oder wenn ($\omega_n \cdot r$) gleich ist: ($\omega_n \cdot r$) = $f(\psi)$, d. h. wenn das Produkt ($\omega_n \cdot r$) längs jeder Funktionalfläche: $\psi = \psi(r, z)$, konstant, von einer Fläche zur andern aber veränderlich ist.

Die erste dieser Lösungen ist für unsere Strömung unbrauchbar, weil nach ihr in der Rohrachse mit $r = 0$, $\omega_n = \infty$ werden

¹⁾ F. Prašil, Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshöhlräumen, Schweizerische Bauzeitung 1903, Nr. 19f.

müßte, was mit der Kontinuität nicht vereinbar wäre. Auch die Absonderung eines mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit: ε_0 , um die Rohrachse wirbelnden Kernes vom Radius r_0 , längs dessen Mantelfläche die Beziehung: $\varepsilon_0 \cdot r_0^2 = \omega_n \cdot r \Big|_{r>r_0} =$ konstant, bestehen könnte, wie sie z. B. von Lorenz¹⁾ für Saugrohre von Turbinen und Kreiselpumpen abgeleitet ist, wird hier unmöglich, da ein solcher wirbelnder Kern an der Strömung selbst nicht teilnehmen kann, und seine Existenz daher ebenfalls dem Kontinuitätsgesetze widersprechen müßte. Es bleibt demnach für die betrachtete Strömung als einzige Lösung die Beziehung bestehen:

$$\omega_n \cdot r = f(2) \quad (7)$$

Mit $\omega_r = 0$ wird

$$\frac{\partial 2}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

d. h.: Die Stromfunktion ist unabhängig von z und eine bloße Funktion von r .

$$2 = f_1(r) \quad (9)$$

Da nun nach Gleichung (5)

$$\omega_z \cdot r = \frac{\partial 2}{\partial r} = f_2(r) \quad (10)$$

muß auch, in Betätigung unserer früher gemachten Behauptung, ω_z eine reine Funktion von r sein. Wählen wir, dem ellipsoidischen Charakter des Geschwindigkeitsdiagrammes entsprechend,

$$\omega_z = \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r^2} \quad (11)$$

worin φ eine noch näher zu bestimmende Funktion von r bzw. eine Konstante bedeutet, und k_1 der für $r=0$ in der Rohrachse auftretenden Höchstgeschwindigkeit ω_{z0} entspricht, so erhalten wir aus der ersten der Gleichungen (5)

$$d 2 = r \cdot \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r^2} \cdot d r \quad (12)$$

beziehungsweise

$$2 = \int r \cdot \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r^2} \cdot d r + C \quad (13)$$

wenn C eine Konstante bedeutet, die sich aus der Bedingung

$$2_0|_{r=0} = 0 \quad (13a)$$

¹⁾H. Lorenz, Technische Hydromechanik 1910, S. 360.

bestimmt. Das pro Zeiteinheit durch den Rohrquerschnitt strömende Volumen ist gleich

$$V = 2\pi \omega_a = 2\pi \left\{ \left(\int_0^{r=r_a} r \cdot \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 r^2} \cdot dr \right) + C \right\} \quad (14)$$

und daraus die mittlere Durchflußgeschwindigkeit,

$$\omega_{sm} = \frac{V}{r_a^2 \cdot \pi} = \frac{2}{r_a^2} \cdot \left\{ \left(\int_0^{r=r_a} r \cdot \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 r^2} \cdot dr \right) + C \right\} \quad (15)$$

Zur Bestimmung der Funktion

$$\varphi = \varphi(r) \quad (16)$$

stellen wir folgende Überlegungen an:

Die Geschwindigkeitserhöhung im Rohrrinnern gegenüber der ursprünglichen Parallelströmung verdankt, wie wir gesehen haben, bei der betrachteten Strömung ihre Entstehung den von innen nach außen anwachsenden Zentrifugaldrücken der Rotationskomponenten. Setzen wir den Druck an der Rohrwand selbst gleich dem für die Parallelströmung im Querschnitte F_1 , also gleich $\frac{p_m}{\gamma}$ und die Druckdifferenz in irgendeinem Querschnittspunkte gegenüber dem Drucke an der Rohrwand gleich $\frac{\Delta p_m}{\gamma}$, so muß, da wie früher dem Drucke $\frac{p_m}{\gamma}$ unter dem Einflusse der Druckhöhe h die Absolutgeschwindigkeit ω_m entspricht, die Beziehung gelten

$$\frac{\omega_m^2}{2g} + \frac{\Delta p_m}{\gamma} = \frac{\omega^2}{2g} \quad (17)$$

wenn ω die Absolutgeschwindigkeit in einem beliebigen Querschnittspunkte bezeichnet.

Für $\frac{\Delta p_m}{\gamma} = 0$ an der Rohrwand wird

$$\omega = \omega_a = \omega_m \quad (18)$$

und, da wegen der Kontinuität die mittlere Geschwindigkeitskomponente in der Achsrichtung der neuen Verteilung, ω_{sm} , gleich sein muß der mittleren Geschwindigkeit bei reibungsfreier Parallelströmung, ω_m ,

$$\omega_a = \omega_{sm} \quad (18a)$$

$\frac{\Delta p_m}{\gamma}$ ist nach unserer Voraussetzung auch gleich

$$\frac{\Delta p_m}{\gamma} = \frac{\omega_{na}^2}{2g} - \frac{\omega_n^2}{2g} \dots (19)$$

wobei ω_{na} die Rotationskomponente an der Rohrwand, ω_n dieselbe in einem beliebigen Punkte des Querschnittes bedeutet. Damit geht Gleichung (17) über in

$$\frac{\omega_a^2}{2g} + \frac{\omega_{na}^2}{2g} = \frac{\omega^2}{2g} + \frac{\omega_n^2}{2g} = \text{konst.} \dots (20)$$

Aus Gleichung (20) findet sich die Höchstgeschwindigkeit, für $\omega_n = 0$, zu

$$\omega_{z0}^2 = \omega_a^2 + \omega_{na}^2 = \text{konst.} \dots (20a)$$

Die z-Komponente, ω_z , ergibt sich aus dem Diagramme (Fig. 5) für einen beliebigen Punkt zu

$$\omega_z^2 = \omega^2 - \omega_n^2 \dots (21)$$

und in Verbindung mit Gleichung (20) bzw. (20a)

$$\omega_z^2 = \omega_{z0}^2 - 2\omega_n^2 \dots (21a)$$

Verglichen mit Gleichung (11) und mit $k_1^2 = \omega_{z0}^2$ ergibt sich die Beziehung

$$\varphi^2 \cdot r^2 = 2\omega_n^2 \dots (22)$$

für welche Gleichung (7) die Bestimmungsgleichung ist. Setzen wir demnach $\omega_n \cdot r = f$ (4) so geht Gleichung (22) über in

$$\varphi^2 \cdot r^2 = \frac{\{f(4)\}^2}{r^2} \dots (22a)$$

woraus sich in Verbindung mit Gleichung (13) die Berechnung von φ bzw. φ durchführen läßt.

Die Bedingung (22a) ist offenbar auch erfüllt mit

$$\varphi = \text{konstant} \dots (16a)$$

Damit ergibt sich der Wert des Integrales der Gleichung (13) zu

$$\varphi = -\frac{1}{3\varphi^2} (k_1^2 - \varphi^2 \cdot r^2) \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r^2} + C \dots (13a)$$

woraus mit

$$C = \frac{k_1^3}{3\varphi^2}$$

sich aus Gleichung (14) das Durchflußvolumen ergibt zu

$$V = 2\pi \varphi_a = \frac{2\pi k_1^3}{3\varphi^2} - \frac{2\pi}{3\varphi^2} (k_1^2 - \varphi^2 \cdot r_a^2) \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r_a^2} \dots (14a)$$

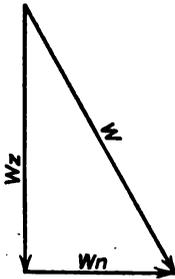


Fig. 5.

Die mittlere Geschwindigkeitskomponente in der Achsrichtung wird

$$\omega_{zm} = \frac{V}{r_a^2 \pi} = \frac{2k_1^3}{3\varphi^2 \cdot r_a^2} - \frac{2}{3\varphi^2 \cdot r_a^2} \{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r_a^2\} \cdot \sqrt{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r_a^2} \quad (15a)$$

Von den durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r \cdot r &= -\frac{1}{2} \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial z} \\ \varepsilon_z \cdot r &= +\frac{1}{2} \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial r} \\ \varepsilon_n &= +\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (23)$$

bestimmten Wirbelkomponenten verschwindet nur der Radialwirbel, ε_r , so daß kein Geschwindigkeitspotential existieren kann. Eine Ausnahme gilt für das Flüssigkeitselement in der Rohrachse, für welches auch ε_z bzw. ε_n den Wert 0 annehmen. Für die Strömung in der Rohrachse, (Querschnitt = 0), besteht demnach das Potential

$$\Phi \Big|_{r=0} = \int \omega_{z0} \cdot dz = \omega_{z0} z + \Phi_0 (z=0) \quad \dots \dots (24)$$

wie für die gleichförmige Parallelströmung der idealen Flüssigkeit.

Mit den früher gefundenen Beziehungen für ω_n bzw. ω_z bestimmt sich

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sqrt{2}}{\varphi} = \text{konst.} \\ \varepsilon_n &= \frac{\omega_z \cdot r}{k_1^2 - \varphi^2 \cdot r^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (25)$$

Es tritt also, neben der über den Querschnitt gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit der Rotationskomponente ε_z , hier auch ein Ringwirbel ε_n , wie bei der Poiseuilleschen Strömung auf, dessen Stärke von innen nach außen zunimmt.

Die nach vorstehendem definierte Strömung in geraden zylindrischen Röhren stellt sich demnach derart dar, daß die Flüssigkeitselemente, neben der einer Parallelströmung entsprechenden Hauptbewegung in der Richtung der Rohrachse, eine über den Querschnitt von innen nach außen anwachsende Rotationsbewegung annehmen, der von außen nach innen abfallende Drücke entsprechen. Die vollständige Ablösung der strömenden

Flüssigkeitselemente an der Rohrwand steht in Übereinstimmung mit der Ansicht Prandtl's¹⁾ über den Verlauf solcher Strömungen. Im übrigen ist von der Ursache des Zustandekommens unserer Strömung abgesehen und ihr Verlauf selbst als reibungsfrei angenommen. Man könnte sich sie auch, nach dem Vorgange Andres²⁾, durch die Vorschaltung eines Schraubenbleches vor den Rohreintrittsquerschnitt F_1 , entstanden denken.

Zwecks Feststellung bzw. Nachprüfung des Zusammenhanges der von uns abgeleiteten Beziehungen mit dem tatsächlichen Strömungsverlauf wollen wir die Ergebnisse der an Röhren mit turbulenter Strömung angestellten Versuche einer näheren Betrachtung unterziehen. Diese Versuche ergeben für die mittlere Geschwindigkeit den Wert

$$\omega_{zm} = 0,80 - 0,8333 \omega_{z0} \quad \dots \quad (26)$$

Nehmen wir als Mittelwert

$$\omega_{zm} = 0,8166 \omega_{z0} \quad \dots \quad (26a)$$

so folgt aus Gleichung (18a) und (20a)

$$\omega_{na}^2 = 0,333 \omega_{z0}^2 \quad \dots \quad (27)$$

Bzw. nach Gleichung (21a)

$$\omega_{za}^2 = \omega_{z0}^2 - 2 \omega_{na}^2 = 0,333 \omega_{z0}^2 \quad \dots \quad (28)$$

Daraus

$$\omega_{za} = 0,577 \omega_{z0} \quad \dots \quad (28a)$$

als Wert für die axiale Geschwindigkeitskomponente an der Rohrwand. Der aus den Versuchen bestimmte Wert dieser Komponente ist gleich

$$\omega_{za}' = 0,57 \omega_{z0}$$

zeigt also mit dem von uns abgeleiteten gute Übereinstimmung. Weiter ist

$$\frac{\omega_{zm}^2}{2g} = 0,666 \frac{\omega_{z0}^2}{2g} = \frac{2}{3} \frac{\omega_{z0}^2}{2g} \quad \dots \quad (29)$$

$$\frac{\omega_{za}^2}{2g} = 0,333 \frac{\omega_{z0}^2}{2g} = \frac{1}{3} \frac{\omega_{z0}^2}{2g} \quad \dots \quad (30)$$

¹⁾ Prandtl, Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904.

²⁾ K. Andres, Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck, Z. V.D.I. 1910, S. 1585.

³⁾ Siehe „Hütte“. I. Bd., 25. Aufl. (1915) S. 280.

Mit diesen Werten ergibt sich die Konstante φ aus

$$\varphi^2 = \frac{2}{3} \frac{\omega_{z0}^2}{r_a^2} / \dots \dots \dots (31)$$

zu

$$\varphi = 0,8166 \frac{\omega_{z0}}{r_a} \dots \dots \dots (31a)$$

Gleichung (11) lautet damit nach entsprechender Transformation

$$\omega_z = \frac{\omega_{zm}}{r_a} \sqrt{1,5 r_a^2 - r^2} \dots \dots \dots (11a)$$

D. h.: Die Kurve der ω_z -Komponenten ist eine Ellipse mit den Halbachsen (Fig. 6),

$$\left. \begin{aligned} a &= \omega_{z0} \\ b &= \sqrt{1,5 r_a^2} \doteq 1,225 r_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

Die Rotationsgeschwindigkeit ω_n ergibt sich gemäß Gleichung (22) zu

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\omega_{zm}}{r_a} \cdot r \dots \dots \dots (22b)$$

Gleichungen (13a), (14a) und (15a) ergeben, mit dem obigen Werte für φ , entsprechende Werte für ω_z , V und ω_{zm} , welcher letzterer mit dem mittleren Versuchswerte identisch ist. Für den Ringwirbel ε_n , ergibt sich aus Gleichung (25)

$$\varepsilon_n = \frac{\omega_z \cdot r}{1,5 r_a^2 - r^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega_z}{1,225 r_a + r} - \frac{\omega_z}{1,225 r_a - r} \right\} (25a)$$

Die Ringwirbelstärke ist also, analog derjenigen der Poiseuilleschen Strömung, gleich dem Mittelwerte der Winkelgeschwindigkeiten des Flüssigkeitselementes bezogen auf die Endpunkte der in die Rohrquerschnittsebene fallenden Achse der Geschwindigkeitsellipse (Fig. 6).

Nach unseren bisherigen Betrachtungen könnten wir die angenommene Strömung mit der tatsächlichen Strömung ohne weiteres vertauschen. Ein prinzipieller Unterschied der letzteren liegt nun aber darin, daß sich das in Fig. 2 dargestellte Geschwindigkeitsdiagramm bzw. die darin zum Ausdrucke gebrachte

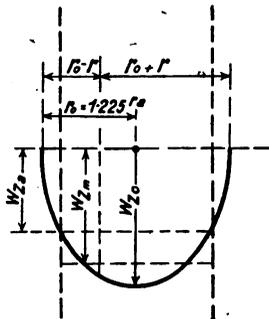


Fig. 6.

Geschwindigkeitsverteilung auch einstellt, wenn man die Messung am freien Ende eines solchen Rohres ausführt. Da hier der gleiche (Atmosphären-) Druck über den ganzen Querschnitt wirksam ist, muß mit $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, auch die Rotationskomponente der angenommenen Strömung in Wegfall gekommen sein. Dies könnte aber, da keine äußeren Massenkkräfte die Strömung beeinflussen, nur durch die Wirkung der als Oberflächenkräfte auftretenden Reibungswiderstände bewirkt werden.

Der Nachweis, daß die tatsächliche Strömung äquivalent ist der von uns angegebenen Strömung, wenn diese, bei sonst gleicher Geschwindigkeitsverteilung für die ω_z -Komponente, unter dem Einflusse der Wandreibung ihre Rotationskomponente einbüßt, läßt sich aus den Versuchen von O. Reynold erbringen.

Mit der aus zahlreichen Untersuchungen (Weisbach, Lang, Biel u. a.) gewonnenen Beziehung für den Druckhöhenverlust pro Längeneinheit in zylindrischen Röhren bei turbulenter Strömung

$$\frac{h_w}{L} = \frac{K_1' \cdot \omega_m^2}{D \cdot 2g} \dots \dots \dots (33)$$

ergibt sich die von O. Reynold gefundene Beziehung (1) für die kritische Geschwindigkeit ω_k zwanglos aus der Gleichung

$$\frac{K_1' \cdot \omega_k^2}{D \cdot 2g} = \frac{K_2' \cdot \eta \cdot \omega_k}{D^2} \dots \dots \dots (34)$$

wobei die rechte Seite der Gleichung dem der Poiseuilleschen Strömung mit nur innerer Reibung zukommenden Druckhöhenverlust entspricht.

Die kritische Geschwindigkeit ist demnach jene Geschwindigkeit, bei der der Widerstand der Zähigkeit zwischen der im Rohre strömenden und der an der Rohrwand haftenden Flüssigkeit überwunden wird, so daß ein Gleiten der ersteren an der letzteren eintritt. Dabei tritt in der Grenzschichte der strömenden Flüssigkeit ein Verzögerungsdruck auf, der durch die Zähigkeit sich in das Innere des Flüssigkeitsquerschnittes fortpflanzt und sich nach folgendem bestimmen läßt.

Reynold hat bei Versuchen über Strömungen in Glasröhren, in deren Achse er farbige Flüssigkeitsfäden und -bänder einführte, nachgewiesen, daß die sichtbaren Erscheinungen der Turbulenz — i. e. Zerreißen des Farbbandes, unstätiger Piezometer-

stand, Wirbelbildung, usf. — immer erst in einer beträchtlichen Entfernung vom Rohreintritte sich bemerkbar machten, trotzdem die kritische Geschwindigkeit auch schon im Rohreintritte vorhanden war. Diese Entfernung erwies sich als abhängig von dem Rauigkeitsgrade der Rohrwandung bzw. vom Durchmesser des Rohres und betrug im günstigsten Falle etwa $L = 30 D$, wenn D den Rohrdurchmesser in m bezeichnet. Wir können uns nun ein solches Rohr vom Durchmesser D und der Länge $L = 30 D$ abgeschnitten denken und die Vorgänge betrachten, die sich auf dem Wege vom Rohreintritte zum Rohraustritte entwickeln (Fig. 7).

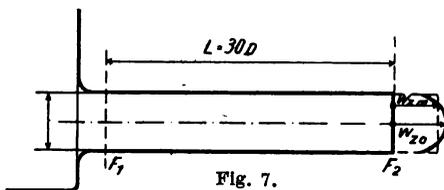


Fig. 7.

In F_2 herrscht, wie das Auftreten der Turbulenzerscheinungen an dieser Stelle angibt, über den Querschnitt die ungleiche Geschwindigkeits-

bzw. Energieverteilung der turbulenten Strömung. Nach allen bisher ausgeführten Versuchen ist der Energieverlust pro Längeneinheit des Rohres auf dem Wege von F_1 nach F_2 gleich dem bei turbulenter Strömung auftretenden Verluste. Im Querschnitte F_1 müssen nun bei Fortfall aller Verluste, sämtliche Flüssigkeitselemente den gleichen Energieinhalt besitzen. Unter dieser Voraussetzung sind für den Verlauf der Strömung zwischen F_1 und F_2 folgende drei Formen möglich:

1. Die Radialgeschwindigkeit ist auf dem ganzen Wege für alle Stromelemente gleich Null ($w_r = 0$). Die Axialgeschwindigkeit ist nach Z unveränderlich ($\frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$). Die Flüssigkeit besitzt im Rohreintritte die von uns abgeleitete Rotationsgeschwindigkeit ω_n und eine dieser entsprechende Druck- und Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt. Auf dem Wege von F_1 nach F_2 wird, bei konstanter Geschwindigkeitsverteilung in der Z -Richtung, die Rotationsenergie durch den Einfluß der Wandreibung aufgezehrt und Druckgleichheit über den Stromquerschnitt herbeigeführt.

2. Die Strömung ist im Eintrittsquerschnitte eine reine Parallelströmung nach Fig. 4, mit $\omega_n = 0$, und mit über den Querschnitt konstanter Geschwindigkeits- und Druckverteilung. Auf dem Wege von F_1 nach F_2 werden, unter dem Einflusse der Wand-

reibung, die außerhalb des mittleren Rohrhalmessers: $r = r_a \cdot \sqrt{2}$, fließenden Stromelemente verzögert, die innerhalb fließenden beschleunigt, während der Druck in allen Punkten eines Querschnittes konstant bleibt. $\left(\frac{\partial p}{\partial r} = 0.\right)$ Es entsteht eine gegen die Rohrachse gerichtete Radialbewegung derart, daß nach Durchlaufen des Weges $\overline{F_1 F_2}$ in F_2 die Geschwindigkeits- und Energieverteilung der turbulenten Strömung auftritt.

-3. Die Strömungsform weist im Eintrittsquerschnitte sowohl Rotationserscheinungen wie bei 1., jedoch kleiner als diese, als auch Radialgeschwindigkeiten nach 2. auf. Unter Aufzehrung der Rotationsenergie durch die Wandreibung erfolgt die Strömung bis zum Endquerschnitte nach 1. und 2.

In ihrer energieaufzehrenden Wirkung sind alle drei Strömungsformen gleichwertig, und hinsichtlich des Auftretens der Turbulenzerscheinungen den Ergebnissen der Versuche Reynolds vollkommen entsprechend.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen und bei geordnetem und ruhigem Zufluß des Nachfüllwassers in das Ausflußgefäß ($\omega_n = 0$), ist die Strömungsform 2. gegeben. Hat das Nachfüllwasser durch irgendeine Ursache, (Unebenheiten der Gefäßwandungen, exzentrischer Zufluß des Nachfüllwassers, usw.), eine Rotationskomponente ω_n , so wird die Strömungsform 3. auftreten. Erteilen wir dem Nachfüllwasser eine Rotationsgeschwindigkeit derart, daß unter Berücksichtigung des aus der Wirbeltheorie bekannten Gesetzes für Flüssigkeitsrotationen ohne Drehbeschleunigung ($q_n = 0$), $\omega_n \cdot r = \text{konst} \cdot r^2$, im Rohrhalmesser r_a sich eine Rotationskomponente ω_{na} nach Gleichung (27) einstellen kann, etwa durch eine schraubenförmige Führung des Nachfüllwassers, so haben wir die Strömungsform 2. vor uns.

Wir wollen zunächst diese letztere, die der Anschaulichkeit und analytischen Behandlung am zugänglichsten ist, als gegeben betrachten.

Da die Wirkung der als Oberflächenkraft auftretenden Wandreibung auf dem Wege $L = 30 D$ offenbar darin besteht, der Flüssigkeit die Rotationskomponente zu entziehen, können wir den Verzögerungsdruck $\frac{p_v^a}{\gamma}$ an der Rohrwand gleichsetzen:

$$\frac{p_v^a}{\gamma} = \frac{\omega_{na}^2}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_{zm}^2}{2g} \quad \dots \dots \dots (35)$$

Es ist dann die Widerstandskraft der Wandreibung

$$W = \mu \cdot \frac{P_v^a}{\gamma} \dots \dots \dots (36)$$

Wenn wir μ als den Reibungsfaktor der Turbulenz, oder kürzer als Turbulenzfaktor, bezeichnen, so erhalten wir die Widerstandskraft über den Umfang, verteilt über sämtliche Moleküle des Rohrquerschnittes

$$W \cdot \frac{U}{F} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{w_{zm}^2}{2g} \cdot \frac{4}{D} \dots \dots \dots (37)$$

Die Arbeit dieser Kraft auf dem Wege der Längeneinheit muß nun gleich sein dem Druckhöhenverluste pro Längeneinheit, demnach

$$\frac{h_w}{L} = W \frac{U}{F} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{4}{D} \cdot \frac{w_{zm}^2}{2g} \dots \dots \dots (38)$$

Ohne die Wirkung der Reibungskräfte wäre die kinetische Energie der strömenden Flüssigkeitselemente auf dem Wege vom Eintritte bis zum Austritte über den ganzen Querschnitt auf $\frac{w_{z0}^2}{2g}$ angewachsen. Eine etwaige Änderung dieser Energie, $\frac{\Delta w_{z0}^2}{2g}$, kann daher nur der Arbeit der Widerstandskräfte auf demselben Wege gleich sein. Diese Änderung bestimmt sich zu

$$\frac{\Delta w_{z0}^2}{2g} = \frac{w_{z0}^2}{2g} - \frac{w_{zm}^2}{2g} = \frac{1}{3} \frac{w_{z0}^2}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{zm}^2}{2g} \dots (39)$$

Mit $L = 30 D$ ergibt sich

$$\frac{\Delta w_{z0}^2}{2g} = W \cdot \frac{U}{F} \cdot 30 D = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{120 \cdot w_{zm}^2}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{zm}^2}{2g} \dots (40)$$

Daraus

$$\mu = 0.00833 \dots \dots \dots (41)$$

als Turbulenzfaktor für das betrachtete Rohr, ein Wert, der ungefähr 83mal größer ist als der des Reibungsfaktors der Poiseuille'schen Strömung.

Damit ergibt sich nach Gleichung (38) als Druckhöhenverlust pro Längeneinheit

$$\frac{h_w}{L} = \frac{0,00416 \cdot 4 \cdot w_{zm}^2}{D \cdot 2g} = \frac{0,016 w_{zm}^2}{D \cdot 2g} \dots \dots (38a)$$

In dieser Beziehung ist sowohl der unmittelbare Einfluß der Wandreibung als auch derjenige der inneren Reibung bzw. Wirbelbildung enthalten, welche letztere ähnlich wie bei der Poiseuilleschen Strömung auftritt. Die Beziehung für diese lautet:

$$\frac{h_w'}{L} = \frac{0,0018 \cdot w_{zm}}{D^2 \cdot 2g} \dots \dots \dots (42)$$

wobei vorausgesetzt ist, daß das Wasser eine Temperatur von 20°C besitzt. Da bei turbulenter Strömung der Geschwindigkeitsabfall in den einzelnen Stromschichten des Querschnittes, besonders in denen nahe der Rohrwand, nicht so gleichmäßig erfolgt wie bei der Poiseuilleschen Strömung — also stärkere Ringwirbelkomponenten auftreten — wird hier auch der Energieverlust durch innere Reibung entsprechend höher sein, ein Umstand, der durch den aus dem Versuche abgeleiteten Ansatz

$$\frac{h_w'}{L} = \frac{0,0018 \cdot w_{zm} \cdot \sqrt{w_{zm}}}{D \cdot \sqrt{D} \cdot 2g} \dots \dots \dots (42a)$$

bestätigt erscheint.

Damit läßt sich der unmittelbare Anteil der Wandreibung an dem Druckhöhenverluste in den von Reynold benützten Glasröhren zu

$$\frac{h_w^a}{L} = \mu' \cdot \frac{w_{zm}^2}{D \cdot 2g} = \left\{ 0,016 - \frac{0,0018}{\sqrt{w_{zm} \cdot D}} \right\} \cdot \frac{w_{zm}^2}{D \cdot 2g} \dots (43)$$

berechnen.

Für $w_{zm} = 5,8$ und $D = 0,0125$ m wird

$$\mu' = 0,0095 \dots \dots \dots (44)$$

in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Versuche von Lang¹⁾ und Biel²⁾.

Aus der Beziehung (34) ist weiter noch ersichtlich, daß bei Strömung unterhalb der kritischen Geschwindigkeit die innere Reibungsarbeit, bei Strömung oberhalb der kritischen Geschwindigkeit die äußere Reibungsarbeit den größeren Wert besitzt. Es stellt sich demnach bei der Strömung durch Röhren stets die Art der Bewegung ein, die mit dem größeren Energieverluste verbunden ist. Dieses Verhalten der Strömung ist in beiden Fällen als größtmögliche Reaktion der Flüssigkeitselemente

¹⁾ Siehe Hütte, I, 22. Aufl. 1915, S. 292 f.

²⁾ R. Biel, Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten, Mitteilungen über Forschungsarbeiten des V.D.I., Heft 44.

gegen die Störung ihres stabilen Gleichgewichtes. — dem der relativen Ruhe — zu erklären.

Wenn wir uns nun fragen, warum die mittlere Geschwindigkeit der turbulenten Strömung im betrachteten Rohre gerade den von uns angegebenen und durch die Versuche bestätigten Wert w_{zm} annehmen muß, so gilt die nachfolgende Betrachtung:

Wir nehmen zunächst an, der Mittelwert der Geschwindigkeit im Rohreintritte sei entstanden durch Aufwindung eines Bruchteiles x der gesamten zur Verfügung stehenden Druckhöhe H . Dann ist der gesamte Energieinhalt der in der Zeiteinheit durch den Rohreintrittsquerschnitt strömenden Flüssigkeit gleich

$$E_1 = \gamma \cdot r_a^2 \pi \cdot \sqrt{2g \cdot x} \cdot H \quad (45)$$

Wie wir wissen, geht nun gemäß Gleichung (40) zur Überwindung des Rohrreibungswiderstandes der Energiebetrag

$$E_2 = \gamma \cdot r_a^2 \pi \cdot \sqrt{2g x} \cdot \frac{x}{2} \quad (46)$$

auf dem Wege vom Rohreintritte zum Rohraustritte verloren, so daß der schließliche Energieinhalt der strömenden Flüssigkeit am Rohraustritte gleich ist

$$E = E_1 - E_2 = \gamma \cdot r_a^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2g x} \left(H - \frac{x}{2} \right) \quad . . (47)$$

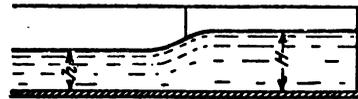
Damit nun dieser verbleibende Energieinhalt ein Maximum bzw. der Verlust ein Minimum werde, muß mit

$$\frac{dE}{dx} = \gamma \cdot r_a^2 \pi \sqrt{2g} \left(\frac{1}{2} \frac{H}{\sqrt{x}} - \frac{3}{4} \sqrt{x} \right) = 0, \quad . (48)$$

bzw.

$$2H - 3x = 0, \quad . (48a)$$

$$x = \frac{2}{3} H^1) \quad . . (49)$$



¹⁾ Dieses ökonomische Grundprinzip der Natur finden wir in analoger Weise angewandt beim Ausflusse von Wasser durch einen Durchlaß ohne Rückstau, Fig. 9. Damit das abfließende Wasser den größten durch

$$E = B \cdot x \cdot \sqrt{2g(H-x)} \cdot H$$

gegebenen Energiegehalt besitze, muß mit

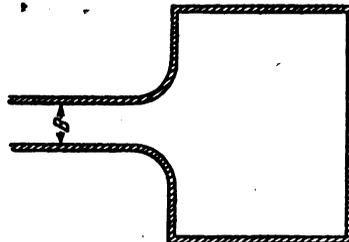


Fig. 9.

sein (Fig. 8). Nun ist aber nach unserer Voraussetzung x nichts anderes als die Geschwindigkeitshöhe der mittleren Stromgeschwindigkeit im Eintrittsquerschnitte, und wir erhalten

$$x = \frac{w_{zm}^2}{2g} = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \cdot \frac{w_{z0}^2}{2g} \dots (49a)$$

Für die analytische Ableitung der bei der Flüssigkeitsreibung wirksamen Oberflächenkräfte aus den hydrodynamischen Grundgleichungen ergeben sich,

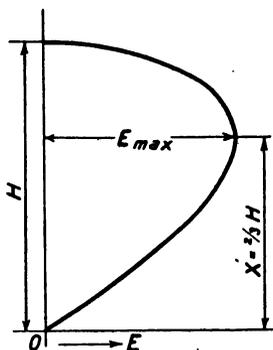


Fig. 8.

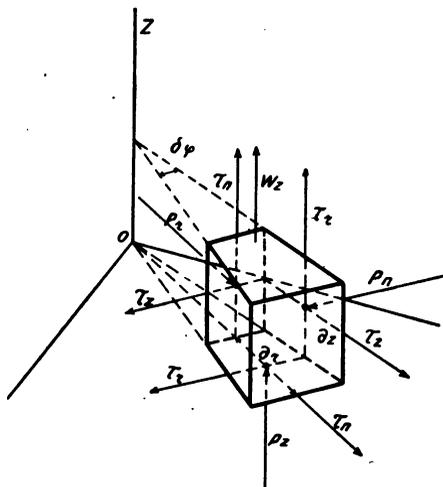


Fig. 10.

gemäß der Darstellung Prasils¹⁾ (Fig. 10), die drei simultanen Gleichungen für die am Elemente angreifenden Komponenten der Oberflächenkräfte P_r , P_n , P_z zu

$$\left. \begin{aligned} P_r &= - \left(\frac{\partial \tau_n}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{\partial p_r}{\partial r} \right) \cdot dm \\ P_n &= - \left(\frac{\partial \tau_r}{\partial z} + \frac{\partial p_n}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_z}{\partial r} \right) \cdot dm \\ P_z &= - \left(\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_r}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{\partial (\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} \right) \cdot dm \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 = \sqrt{H-x} - \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{H-x}},$$

$$x = \frac{2}{3} H \text{ sein (Fig. 8).}$$

Für den Ausfluß von Dampf und Luft aus einfachen Mündungen und Düsen gelten ähnliche Betrachtungen.

¹⁾ F. Prasil, Technische Hydrodynamik 1913, S. 148f.

wobei p_r, p_n, p_z die in der Richtung der Zylinderkoordinaten wirksamen Druckkomponenten, τ_r, τ_n, τ_z die gleichartigen Tangentialspannungskomponenten bedeuten. Andererseits gilt allgemein für P_r, P_n, P_z als Beschleunigungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} P_r &= \left(\frac{d\omega_r}{dt} - \frac{\omega_n^2}{r} \right) \cdot dm = - \left(q_r^w + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \right) \cdot dm \\ P_n &= \left(\frac{d\omega_n}{dt} + \frac{\omega_n \cdot \omega_r}{r} \right) \cdot dm = - \left(q_n^w + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{r \cdot \partial \varphi} \right) \cdot dm \\ P_z &= \frac{d\omega_z}{dt} \cdot dm = - \left(q_z^w + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot dm \end{aligned} \right\} (51)$$

wobei q_r^w, q_n^w, q_z^w Beschleunigungskomponenten der Reibungswiderstände bedeuten. Da wir es mit einer achsensymmetrischen Strömung zu tun haben, verschwinden alle Ableitungen nach φ .

Ferner ist für unsere Strömung $\tau_z = 0$ wegen Konstanz der Winkelgeschwindigkeit der Rotationskomponente (Gleichung (25)),

$q_r^w = 0$, so daß wir mit $\omega_r = 0$ und $\frac{d\omega_z}{dt} = 0$, erhalten

$$q_r^w = 0; \quad q_n^w = - \frac{d\omega_n}{dt}; \quad q_z^w = - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad . \quad (52)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega_n^2}{r}; \quad \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial p_z}{\partial z} = - \frac{\gamma}{g} \cdot q_z^w \quad . \quad (53)$$

Damit wird

$$P_r = - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad P_n = \frac{d\omega_n}{dt}; \quad P_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Aus den Gleichungen (50) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} &= 0; \quad q_z^w = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial (\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial z} &= 0; \quad \tau_n = f(r) \\ \frac{d\omega_n}{dt} = - q_n^w &= - \frac{g}{\gamma} \left(\frac{\partial (\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial \tau_r}{\partial z} \right) \\ p_r + p_n + p_z &= 3p = 3k - 3k_0(r) \cdot (z - L) \end{aligned} \right\} . \quad . \quad (55)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch die folgenden Ansätze:

$$p_r = p_n = p_z = p = k - k_0(r) \cdot (z - L) \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

$$k_0(r) = k_0 \frac{r^2}{r_a^2}; \quad k_0 = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \cdot r = -2 \frac{g}{\gamma} \cdot k_0 \frac{r^2}{r_a^2} (z-L) \\ \frac{d\omega_n}{dt} &= \frac{d\omega_n}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{g}{\gamma} \left(\frac{\partial(\tau_z \cdot r)}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial \tau_r}{\partial z} \right) = \\ &= -\sqrt{\frac{g \cdot k_0}{\gamma \cdot 2z}} \cdot \frac{r}{r_a} \cdot \omega_z \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

wobei k den Druck an der Rohrmündung (Austritt), $k_0^{(r)}$ den mit dem Halbmesser veränderlichen, nach z aber konstanten Reibungswiderstand bzw. spezifischen Druckhöhenverlust bedeutet. Damit wird

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} = k_0 \frac{r^2}{r_a^2}; \quad \frac{\partial p_r}{\partial r} = 2k_0 \frac{r}{r_a^2} \cdot z; \quad \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} = 0 \quad (56a)$$

$$\tau_n = -k_0 \frac{r^3}{4r_a^2} = -k_0^{(r)} \cdot \frac{r}{4} \quad \dots \quad (59)$$

Aus Gleichung (56) geht hervor, daß in der Rohrachse, mit $r=0$, der Druck auf dem ganzen Strömungswege gleich k (Atmosphärendruck) ist. Für $z=0$ (im Ausflußquerschnitte) ist der Druck in allen Punkten des Querschnittes gleich groß und wieder gleich k . Als Mittelwerte der Pressung ergeben sich in einem beliebigen Querschnitte

$$p_r^{(m)} = p_n^{(m)} = p_z^{(m)} = k - \frac{k_0}{2} (z-L) \quad \dots \quad (56b)$$

bzw. deren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial p_r^{(m)}}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p_n^{(m)}}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial p_z^{(m)}}{\partial z} = \frac{k_0}{2} \quad (56c)$$

Für die Berechnung der in der Zeiteinheit im betrachteten Strömungsgebiete durch die Wandreibung verlorenen Leistung gilt der Ansatz:

$$-dE = -(q_z^w \cdot \omega_z + q_n^w \cdot \omega_n) \cdot r dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad \dots \quad (60)$$

Mit den oben abgeleiteten Beziehungen vereinfacht sich dieser Ausdruck in

$$dE = \left(-\frac{\partial(\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} \omega_z - \left\{ \frac{\partial(\tau_z \cdot r)}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial \tau_r}{\partial z} \right\} \omega_n \right) \cdot r dr \cdot d\varphi dz \quad (60a)$$

Mit den aus unseren Gleichungen bestimmten Werten für τ_n , τ_r , ω_z , ω_n ergibt sich die gesamte im betrachteten Strömungs-

gebiete verlorene Energie — als Dissipation bezeichnet — zu

$$E = \iiint \left\{ -\frac{\partial(\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} \cdot \omega_z - \left(\frac{\partial(\tau_z \cdot r)}{r \cdot \partial r} + \frac{\tau_r}{\partial z} \right) \omega_n \right\} r dr d\varphi dz \quad (61)$$

wofür mit den Grenzen

- z_2 und z_1 , ($z_2 - z_1 = -L$), für z
- 2π und 0 für φ
- r_a und 0 für r :

$$E = - \int_0^L dz \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{r_a} \left(\frac{\partial(\tau_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} \omega_z + \frac{\partial \omega_n}{\partial z} \cdot \omega_n \cdot \omega_z \right) r dr \quad (61a)$$

die Integration von (61a) den Wert liefert:

$$E = \pi r_a^2 (p_1 - p_2) \cdot \omega_{zm} \quad (62)$$

In diesem Werte ist sowohl die Änderung der Bewegungsenergie als auch der Druckabfall als dem Turbulenzverluste äquivalente Wärmeenergie enthalten. Erstere bestimmt sich aus

$$E_1 = \iiint \frac{d\left(\frac{\omega_m^2}{2}\right)}{dt} \cdot r dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad (63)$$

mit

$$\frac{\omega_m^2}{2} = \frac{\omega_{zm}^2}{2} + \frac{\omega_{nm}^2}{2} \quad (64)$$

Daraus

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\omega_m^2}{2}\right)}{dt} &= \frac{\partial\left(\frac{\omega_m^2}{2}\right)}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial\left(\frac{\omega_m^2}{2}\right)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \\ &= \left[\frac{\partial\left(\frac{\omega_{zm}^2}{2}\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{\omega_{nm}^2}{2}\right)}{\partial z} \right] \frac{dz}{dt} = \frac{k_0}{2} \cdot \omega_z \quad (65) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^L dz \cdot \int_0^{r_a} \frac{k_0}{2} \cdot \frac{\omega_{zm}}{r_a} \sqrt{1,5 r_a^2 - r^2} \cdot r dr = \\ &= \frac{1}{2} \pi r_a^2 (p_1 - p_2) \omega_{zm} \quad (66) \end{aligned}$$

D. h.: Von dem durch Gleichung (62) bestimmten Gesamtenergieverluste infolge Wandreibung tritt die eine Hälfte als Ver-

lust an kinetischer, die andere Hälfte als Verlust an potentieller Energie der strömenden Flüssigkeit auf.

Wenn wir uns nun das Versuchsrohr über F_2 hinaus verlängert und die Strömung fortgesetzt denken, so tritt, gemäß Gleichung (56) bzw. (56a), gegenüber der auch weiterhin konstanten Pressung k in der Rohrachse, gegen die Rohrwand zu, durch die Wirkung der Wandreibung, ein Unterdruck auf, der sich, wie ein Blick auf die erste der Gleichungen (2) lehrt, bei Fortfall der Rotation, $\omega_n = 0$, in einer Radialbeschleunigung bzw. im Auftreten einer Radialbewegung äußert. Wir haben demnach für einen beliebigen Querschnittspunkt im Abstände z_1 vom Querschnitte F_2 mit

$$q_r = q_n = q_s = 0; \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0,$$

$$-\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p_r}{\partial r} = \omega_r \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial r} = + \frac{g}{\gamma} \cdot 2 k_0 \frac{z_1}{r_a^2} \cdot r \quad \dots \quad (67)$$

Daraus ist

$$\omega_r^2 = \frac{2g}{\gamma} \cdot k_0 z_1 \frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2} \quad \dots \quad (68)$$

Darnach würde ω_r an der Rohrwand für $r = r_a$ verschwinden und in der Rohrachse für $r = 0$ seinen Höchstwert annehmen.

Wenn wir nun auf die Kontinuitätsgleichung (3) zurückgreifen, so finden wir, daß wegen:

$$\frac{\partial (\omega_z \cdot r)}{\partial z} = 0,$$

— als Ergebnis der aus den Versuchen gewonnenen Diagramme — auch

$$\frac{\partial (\omega_r \cdot r)}{\partial r} = 0$$

sein muß. Daraus ergibt sich die Bedingung: $(\omega_r \cdot r)$ unabhängig von r , eine Beziehung, die dem von uns auf Grund des Gleichgewichtes der Pressungen abgeleiteten Ansatz (68) widerspricht, wengleich die Abweichungen der hiernach gebildeten Werte für $\frac{\partial (\omega_r \cdot r)}{\partial r}$ vom Werte Null nur sehr klein sind. Es würde sich demnach an der Stelle $L = 30 D$ im Rohre plötzlich eine diskontinuierliche Strömung einstellen, wenn nicht gleichzeitig $\frac{\partial (\omega_z \cdot r)}{\partial z}$ einen den

Abweichungen des Wertes $\frac{\partial (\omega_r \cdot r)}{\partial r}$ vom Werte Null entsprechenden negativen Wert annehmen würde. Dadurch wird aber momentan ω_{zm} und damit der Reibungswiderstand verkleinert, so daß nunmehr das Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial r}$ das Vorzeichen wechselt und eine Rückkehr der Radialbewegung eingeleitet wird. Es wird sich demnach ein stationärer Strömungszustand einstellen, der neben der Parallelströmung als Hauptströmung, kleine, schwingende Bewegungen der Flüssigkeitselemente in radialer bzw. achsialer Richtung aufweist, wobei diesen Pulsationen eine vollkommen gesetzmäßig geordnete Verteilung über den Querschnitt zukommt. Die Pulsationsbewegung ist aufzufassen als Superposition zweier harmonischer Schwingungen von gleicher Amplitude und Schwingungsdauer, zwischen denen eine Phasenverschiebung von $\pi = 180^\circ$ besteht. Wenn wir die Radialgeschwindigkeitskomponente mit ω_r , den Zuwachs der Axialgeschwindigkeitskomponente mit $\Delta \omega_z$, das dem Abstände r entsprechende spezifische Druckgefälle mit $\frac{\partial p}{\partial z}$ (Gleichung 56 a), das mittlere spezifische Querschnittgefälle mit $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{konstant}$ (Gleichung 57), mit t_0 die Schwingungsdauer einer Periode (Pulsung), mit t einen beliebigen Zeitmoment innerhalb einer solchen Periode, mit $\bar{\omega}_z$ die nach z und t konstanten Mittelwerte der Geschwindigkeiten der Hauptströmung bezeichnen, so erhalten wir für die Pulsationsbewegung die folgenden Ansätze:

$$\Delta \omega_z = - \omega_r \dots \dots \dots (69)$$

$$\omega_z = \bar{\omega}_z + \Delta \omega_z \dots \dots \dots (69a)$$

$$\bar{\omega}_z = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \omega_z \cdot dt \dots \dots \dots (69b)$$

Nach Einsetzen von ω_z aus Gleichung (69a) ergibt sich aus Gleichung (69b) mit Gleichung (69)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \Delta \omega_z \cdot dt = 0 \\ \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \omega_r \cdot dt = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (69c)$$

Für die Pulsationsgeschwindigkeiten ergeben sich damit die Ansätze:

$$\frac{d(\Delta \omega_z)}{dt} = -\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{2\pi}{t_0} \cdot \frac{g}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\bar{\partial p}}{\partial z} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{t_0} \cdot t \quad (69d)$$

und daraus

$$\Delta \omega_z = -\omega_r = -\mu \cdot \frac{\omega_{zm}^2}{r_a^2} \cdot (3r - 2r_a) \cdot \sin \frac{2\pi}{t_0} \cdot t \quad (69e)$$

demnach zwei in der Phase um $\varphi = \pi$ verschobene freie Schwingungen. Der größte Schwingungsausgleich in der z - und r -Richtung ist gleich

$$-a_z = a_r = -\mu \cdot \frac{t_0}{2\pi} \cdot \frac{\omega_{zm}^2}{r_a^2} (3r - 2 \cdot r_a) \quad . \quad (70)$$

Er ist demnach in der Rohrachse ($r = 0$) am größten, wird für $r = \frac{2}{3} \cdot r_a$ gleich Null, und erreicht ein relatives Maximum für $r = r_a$.

Aus der Definitionsgleichung

$$\Delta \omega_z = -\omega_r = \frac{dz}{dt} = -\frac{dr}{dt}$$

ergibt sich, daß z und $(-r)$ identisch vertauschbar sind, womit die obigen Ansätze für ω_z und ω_r der Kontinuitätsgleichung (3) genügen.

Wegen der aus den Versuchen hervorgehenden Gleichheit der Geschwindigkeitsverteilung in allen aufeinanderfolgenden Querschnittsflächen des Rohres, sowie wegen der Proportionalität des Druckhöhenverlustes mit der Rohrlänge bei turbulenter Strömung, sind, nach dem Vorschlage von Lorentz, die partiellen Ableitungen der Mittelwerte der Geschwindigkeiten der Hauptströmung, sowie der Pulsationsgeschwindigkeiten (Turbulenzgeschwindigkeiten) nach der Achsrichtung gleich Null zu setzen. Haupt- und Pulsationsschwierigkeiten sind daher bloß mit dem Radius veränderlich, was übrigens auch schon aus der von uns abgeleiteten Art der Entstehung der letzteren hervorgeht. Da die Pulsationsgeschwindigkeiten in ihrer Wirkung jenen Druckausgleich im Rohrrinnern zu bewerkstelligen haben, der durch die ursprüngliche Radialbewegung hätte hervorgerufen werden sollen, beruht diese Wirkung offenbar auf einem Transport von Bewegungsgröße aus dem Rohrrinnern gegen die Rohrwand zu,

wobei zusätzliche Oberflächenkräfte ausgelöst werden, deren Arbeit den gesamten Druckhöhenverlust der strömenden Flüssigkeit vermehrt. Diese Arbeit ist nach der Art ihrer Entstehung Gleichung (63) dem spezifischen Druckhöhenverluste durch Wandreibung, also der Wandrauigkeit, direkt, dem Rohrdurchmesser indirekt proportional.

Wenn wir eine Ringschichte mit dem mittleren Halbmesser r , von der Breite dr und der Länge dz in diesem zweiten Teile der

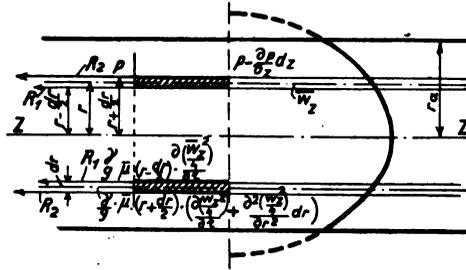


Fig. 11.

Strömung betrachten (Fig. 11), so finden wir, daß sich der Druck p längs einer ihrer Erzeugenden nach

$$\Delta p = p - \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad \dots (71)$$

ändert. Nehmen wir die Breite der Ringschichte so klein an, daß wir den Druck in jeder Stirnfläche der Ringschichte als konstant betrachten können, dann wirkt auf die letztere die Gesamtkraft

$$P = 2r \cdot \pi \cdot dr \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \quad \dots (72)$$

Diese verzögernde Kraft ist das Resultat der Wirkung zweier Reibungskräfte, die an der inneren bzw. äußeren Mantelfläche der Ringschicht angreifen, und nach unseren bisherigen Ableitungen dem Differentiale der halben Geschwindigkeitsenergie der strömenden Flüssigkeitselemente und ihrer Entfernung vom Strömungsmittelpunkte proportional sein müssen. Bezeichnen wir nach *Lorentz*¹⁾ die Mittelwerte der Hauptgeschwin-

¹⁾ H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig 1907.

digkeit mit ω_z , so gilt für die Reibungskraft an der inneren Mantelfläche

$$R_1 = -\frac{\gamma}{g} \bar{\mu} \cdot 2 \left(r - \frac{dr}{2} \right) \pi \cdot dz \cdot \left(r - \frac{dr}{2} \right) \cdot \frac{\partial \frac{\bar{\omega}_z^2}{4}}{\partial r} \quad (73)$$

und für die an der äußeren Mantelfläche

$$R_2 = -\frac{\gamma}{g} \bar{\mu} \cdot 2 \cdot \left(r + \frac{dr}{2} \right) \cdot \pi \cdot dz \cdot \left(r + \frac{dr}{2} \right) \left\{ \frac{\partial \frac{\bar{\omega}_z^2}{4}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\bar{\omega}_z^2}{4} \right)}{\partial r^2} \right\} \quad (74)$$

Somit wird

$$P = -(R_2 - R_1) = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz = \\ = \frac{\gamma}{g} \cdot \bar{\mu} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot dz \left\{ \frac{\partial \frac{\bar{\omega}_z^2}{4}}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 \left(\frac{\bar{\omega}_z^2}{4} \right)}{\partial r^2} \right\} \quad (75)$$

Führen wir nun noch für ω_z nach dem Versuchsdiagramme die von uns aufgestellte Beziehung für die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitte

$$\bar{\omega}_z = \frac{\bar{\omega}_{zm}}{r_a} \cdot \sqrt{1,5 r_a^2 - r^2}$$

ein, so ergibt sich, nach Ausführung der Differentiationen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{3}{2} \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{\bar{\omega}_{zm}}{r_a^2} \cdot r \quad (76)$$

Bilden wir den Mittelwert des Druckdifferentialies über den ganzen Querschnitt, so erhalten wir

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} \frac{3}{2} \bar{\mu} \frac{\bar{\omega}_{zm}^2}{r_a^2} \frac{2\pi}{r_a^2} \int_{r=0}^{r=r_a} r^2 dr \equiv \gamma \frac{\bar{\mu}}{2} \cdot \frac{\bar{\omega}_{zm}^2}{2g} \cdot \frac{2}{r_a} \quad (77)$$

ein Wert, der bis auf den Mittelwert des Turbulenzfaktors $\bar{\mu}$ dem im ersten Teile des Rohres gefundenen Druckhöhenverluste bei turbulenter Strömung gleich ist (vgl. Gleichung (38)). Wir können demnach mit Hilfe der obigen Ansätze und Mittelwertbildung des Druckgefälles über den Querschnitt, hinsichtlich der Berechnung der Reibungsverluste die analytisch schwierig zu behandelnde

Pulsationsbewegung durch eine gleichwertige Parallelströmung mit turbulenter Geschwindigkeitsverteilung ersetzen.

Der Strömungsform 2. genügen die folgenden Ansätze für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\omega_n = 0; \quad \omega_z = \frac{\omega_{zm}}{r_a} \cdot \sqrt{r_a^2 + \frac{z}{2z_0} (r_a^2 - 2r^2)} \quad (78)$$

$$\omega_r = -\frac{\omega_{zm}}{12r_a \cdot r \cdot z} \cdot \left\{ r_a^2 - 4 \frac{z}{z_0} r_a^2 - 2r^2 \right\} \sqrt{r_a^2 + \frac{z}{2z_0} (r_a^2 - 2r^2)} \quad (79)$$

Sie ergeben eine stetige Abnahme bzw. Zunahme der ω_z^2 in der Z-Richtung, und erfüllen die Kontinuitätsbedingung (Gleichung 3) mit

$$\frac{\partial (\omega_z \cdot r)}{\partial z} = -\frac{\partial (\omega_r \cdot r)}{\partial r} = \frac{\omega_{zm} \cdot r}{4r_a \cdot z_0} \cdot \frac{r_a^2 - 2r^2}{\sqrt{r_a^2 + \frac{z}{2z_0} (r_a^2 - 2r^2)}} \quad (80)$$

Von den Wirbelkomponenten verschwinden ε_r und ε_z , wegen $\omega_n = 0$, während eine Ringwirbelkomponente auftritt

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right)$$

die mit zunehmendem Halbmesser wächst. Mit

$$\left. \begin{aligned} q_r = q_n = q_z = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} = - \left(q_z^w + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) \\ q_r^w = - \left(\omega_z \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \omega_z \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial z} \right) \\ \tau_r = \tau_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

kann, wie früher, nach Gleichung (60 u. flg.), die Energiebilanz für diese Form der Strömung aufgestellt werden.

Für die Strömungsform 3) werden die analytischen Ansätze schon sehr verwickelt. Ihre mathematische Behandlung bietet nichts wesentlich Neues und soll daher hier nicht weiter durchgeführt werden.

Der gesamte Druckhöhenverlust setzt sich demnach, wie dies R. Biel, H. Lang u. a. auch schon auf Grund ihrer empirisch gefundenen Zahlenwerte abgeleitet haben, aus drei Bestandteilen zusammen:

1. Aus dem Druckhöhenverlust, hervorgerufen durch die Stoßerscheinungen innerhalb der Strömung (Pulsationsbewegung).

2. Aus dem Druckhöhenverluste, bedingt durch die Unebenheiten der begrenzenden Wandflächen (Sekundärströmungen).

3. Aus dem Druckhöhenverluste durch innere Reibung.

H. Lang setzt diese Anteile gleich:

$$\frac{h \omega}{L} = \left(a_0 + \frac{a_1}{\sqrt{R}} + \frac{a_2}{\sqrt{R \cdot \omega_{zm}}} \right) \cdot \frac{\omega_{zm}^2}{2g \cdot R} \quad (82)$$

wobei R den hydraulischen Radius, d. i. $\frac{\text{Fläche i. m}^2}{\text{Umfang i. m}}$, L die Rohrlänge in m bezeichnet. a_0 ist eine Konstante, a_1 eine Rauigkeitszahl, a_2 eine Zähigkeitszahl. a_1 ist mit der Art und Beschaffenheit der Wandung, a_2 mit der Temperatur und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit veränderlich.

Bei der im vorstehenden abgeleiteten Form der Strömung ist überdies achsensymmetrische Verteilung des Widerstandes der Rohrwand längs des ganzen Stromweges vorausgesetzt. Ist dies — wie im praktischen Betriebe fast immer — nicht der Fall, folgen also an der Rohrwand längs des Umfanges eines Querschnittes Stellen größerer Rauigkeit auf Stellen geringerer Rauigkeit, so verliert unsere Annahme $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ ihre Berechtigung. Es treten Rotationen auf, die, je nach der Verteilung der Unstetigkeitsstellen im Rohre, ihre Richtung wechseln und im weiteren Verlaufe der Strömung entweder kompensiert, oder verstärkt werden, so daß man am freien Auslaufe eines solchen Rohres mitunter ganz deutliche Drehbewegungen der äußeren Flüssigkeitselemente beobachten kann. Auf die Größe des Druckhöhenverlustes sind diese Rotationen, wie aus den Versuchen hervorgeht, unter Umständen von beträchtlichem Einflusse, ohne daß sie bei der analytisch völlig unbestimmbaren Art ihrer Entstehung und Größe anders als durch den empirischen Versuch berücksichtigt werden können. Ihre Wirkung ist in dem von Biel¹⁾ für Röhren verschiedener Bauart und verschiedenen Materiales experimentell bestimmten Wandrauigkeitsfaktor f enthalten. Am besten ersieht man dies aus dem Vergleiche der Werte f

¹⁾ R. Biel, Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteil. über Forschungsarbeiten d. V. d. I., Heft 44.

für die Rauigkeitsgrade I, II, III, blankgezogenen Röhren, Blechröhren, und gußeisernen Röhren entsprechend. Diese Faktoren sind in der angegebenen Ordnung: 0,0064, 0,018 und 0,036. Nun ist die Oberflächenbeschaffenheit zwischen I und II bei weitem nicht so verschieden, wie zwischen II und III, und doch ist im ersten Falle der Rauigkeitsfaktor etwa das Dreifache, im zweiten bloß das Doppelte desjenigen des vorhergehenden Grades. Die blankgezogenen Röhren haben eben den regelmäßigsten Querschnittsverlauf, während die Unstimmigkeiten (Unstetigkeiten der Flächenrauigkeit, Verengungen, Erweiterungen, Verschiebungen des Querschnittes usw.), in Blech- bzw. Gußröhren schon stark hervortreten.

Wir erhalten somit als endgültiges Bild der turbulenten Strömung in zylindrischen Röhren:

1. In der Einlaufstrecke ($L_{\max} = 30 D$).

A) Eine von Rotation begleitete Parallelströmung mit ellipsoidischer Geschwindigkeitsverteilung und mit in radialer Richtung veränderlicher Druckverteilung über den Querschnitt.

B) Eine Schichtströmung ohne Rotation mit Druckgleichheit und mit nach Z und r veränderlicher Achsial- und Radialgeschwindigkeit über den Querschnitt.

C) Eine Schichtströmung mit Rotation, und einer, nach A) und B) kombinierten Geschwindigkeits- und Druckverteilung über den Querschnitt.

2. In der Hauptstrecke eine Parallelströmung ohne Rotation und mit unveränderlicher Druckverteilung über den Querschnitt als Hauptströmung, der sich von innen nach außen an Intensität veränderliche, stationäre Pulsationsbewegungen, sowie örtlich veränderliche, bei gleichbleibender Durchflußgeschwindigkeit und Flüssigkeitstemperatur aber auch stationäre Rotationsbewegungen überlagern. Die zwischen den einzelnen Stromschichten wirksamen Oberflächenkräfte erzeugen Ringwirbel, die die Strömung in ihrem ganzen Verlaufe begleiten und über den Querschnitt gegen die Rohrwand hin stark zunehmen.

In Röhren, Druckstollen, geschlossenen Kanälen etc. von anderem als kreisförmigem Querschnitte stellt sich die Erscheinung der Turbulenz auch ein, doch ist, infolge des im allgemeinen

ungünstigeren Wertes für den hydraulischen Radius gegenüber dem des kreisförmigen Profiles der Druckhöhenverlust ungünstiger als im ersten Falle. Am ungünstigsten sind beim rechteckigen Profile die Verhältnisse in den »Reibungsecken«, in denen der stärkste Geschwindigkeitsabfall auftritt, und in unmittelbarer Wandnähe¹⁾, während im Innern des Querschnittes eine ziemlich gleichförmige Geschwindigkeitsverteilung auftritt, so daß z. B. in der amerikanischen Wasserturbinen- und Kreiselpumpenindustrie rechteckige gehobelte Ausflußrohre in Verbindung mit einem System von Pitotröhren zur Wassermengenmessung verwendet werden.

Diese Geschwindigkeitsverteilung kann zunächst dargestellt werden durch ein Geschwindigkeitsvolumen, das, ähnlich wie bei der Strömung durch den kreisförmigen Querschnitt, von Ellipsenbögen eingehüllt wird, welche die Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten des rechteckigen Umfanges mit der Höchstgeschwindigkeit im Querschnittsmittelpunkte verbinden (Fig. 12).

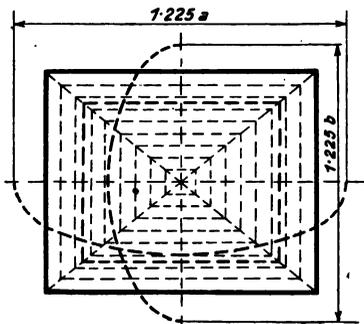


Fig. 12.

Diese Ellipsen haben eine gemeinsame kleine Achse und eine je nach der Entfernung des betrachteten Strompunktes vom Querschnittsmittelpunkte verschiedene große Achse. Durch das Auftreten der Pulsationsbewegung wird aber diese theoretische Geschwindigkeitsverteilung gestört, und zwar hauptsächlich durch die,

¹⁾ Siehe V. Kaplan, Die Gesetze der Flüssigkeitsströmung bei Berücksichtigung der Flüssigkeits- und Wandreibung, Z. V. D. I. 1912, S. 1578.

wegen der verschiedenen Abstände der Umfangspunkte, ebenfalls verschieden starke Pulsationsbewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen des Querschnittes. Dieser Umstand hat zur Folge, daß zwischen den einzelnen Querschnittspunkten ein zusätzlicher Energieaustausch, stattfindet, der die Geschwindigkeitsunterschiede im Querschnitte vermindert. Wir erhalten als schließliches Bild der Strömung eine über den Querschnitt sehr gleichmäßig verteilte beinahe konstante Geschwindigkeit, die gegen die Reibungsecken und Reibungswände hin rasch abfällt. Die mittlere Geschwindigkeit ist dabei, nach zahlreichen Versuchen, etwa 0,95 bis 0,98 der Höchstgeschwindigkeit in der Rohr- bzw. Kanalachse (Fig. 13).

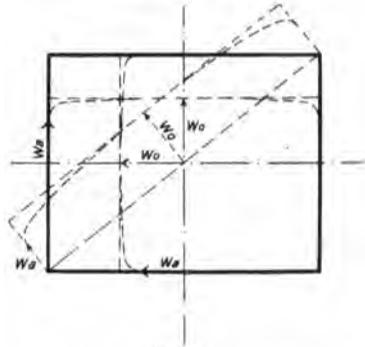


Fig. 13.

Daß diese Verteilung der tatsächlichen Strömung entspricht, geht aus den Prašils Hydrodynamik entnommenen Diagrammen von Geschwindigkeitsmessungen im Versuchskanale des Maschinenlaboratoriums der eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich hervor¹⁾. Trotz der exzentrischen Lage der Höchstgeschwindigkeit, läßt sich die erwähnte Geschwindigkeitsverteilung nach den Kanalecken hin deutlich erkennen (Fig. 14 und 15).

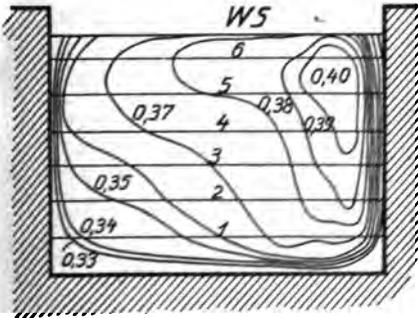


Fig. 14.

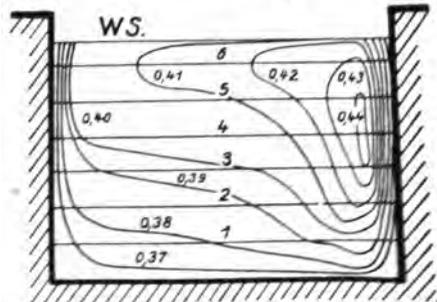


Fig. 15.

¹⁾ F. Prašil, Hydrodynamik 1913, S. 178.

Die von uns abgeleiteten Gesetze der turbulenten Strömung können nun sinngemäß auf die Untersuchung aller jener Strömungen angewendet werden, bei denen die Wirkung der Turbulenz zu berücksichtigen ist, wie z. B. auf die reine Rotationsbewegung, die Strömung durch ringförmige Spalten, die Theorie des Schiffswiderstandes, die Strömung in offenen Wasserläufen u. v. a. Wir wollen hier nur einige Betrachtungen über die Strömung durch ringförmige Spalten und die in offenen Flußläufen anstellen und die Behandlung der übrigen Probleme besonderer Bearbeitung vorbehalten.

Die Strömung von Wasser, Luft und Dampf, durch enge, ringförmige Spalten hat im modernen Maschinenbau, namentlich aber für die Konstruktion der Hochdruckkreiselpumpen; der Dampfturbinen, Turbokompressoren usw., ein großes technisches und wirtschaftliches Interesse erlangt. Die Strömungsgeschwindigkeit ist hierbei unter normalen Verhältnissen größer als die Grenzgeschwindigkeit, so daß die für die turbulente Strömung aufgestellten Bewegungs- und Widerstandsgesetze gelten.

Aus Gleichung (37) geht hervor, daß die Widerstandshöhe bei turbulenter Strömung mit kleiner werdendem hydraulischen Radius $\frac{F}{U}$, beträchtlich anwächst. Davon macht man in den oben-erwähnten Maschinen Gebrauch, indem man zur Abdichtung von Druckkrämen, Stopfbüchsen, Entlastungskolben, bzw. -Ventilen usw. lange und enge, ringförmige Spalte, sogenannte Labyrinthdichtungen, anordnet (Fig. 16). In ihrer Wirkung vereinigen sie die im V. Abschnitt zu behandelnden Erscheinungen des hydraulischen Stoßes durch Querschnitts- und Richtungs-, bzw. Geschwindigkeitsänderungen, mit der intensiven Wandreibung der turbulenten Strömung. Wir wollen hier bloß die letztere in Betracht ziehen.

Durch einen zylindrischen Ringspalt vom mittleren Durchmesser D_m und der Spaltbreite b fließt unter der Wirkung eines Druckgefälles $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ bei reibungs- und wirbelfreier Strömung ein Volumen $V_0 = F_0 \cdot \omega_0$, bzw. mit $F_0 = \pi D_m \cdot b$ und

$$\omega_0 = \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}},$$

$$V_0 = \pi \cdot D_m \cdot b \cdot \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}} \quad \dots \quad (83)$$

aus. Das Auftreten des Wandreibungswiderstandes bewirkt eine Verminderung dieses Ausflußvolumens derart, daß

$$V' = \xi \cdot V_0 \dots \dots \dots (83a)$$

wobei $\xi < 1$ ist. Der Wert von ξ bestimmt sich aus der Überlegung,

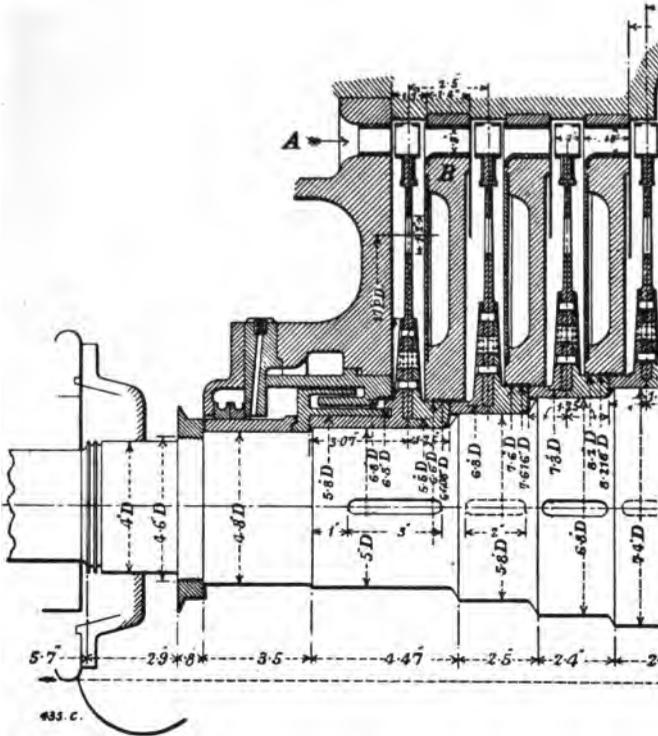


Fig. 16.

daß das gesamte zur Verfügung stehende Druckgefälle verbraucht wird

1. zur Erzeugung einer Geschwindigkeitshöhe $\frac{w_m^2}{2g}$.
2. zur Überwindung der einer mittleren Geschwindigkeit w_m auf der Spatlänge L entsprechenden Widerstandshöhe der Wandreibung.

Wir haben daher die Ansätze:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{w_m^2}{2g} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{w_m^2}{2g} \cdot \frac{U}{F} \cdot L \dots \dots (84)$$

Daraus mit

$$\frac{U}{F} = \frac{2 \cdot D_m \cdot \pi}{D_m \cdot \pi \cdot b} = \frac{2}{b} \dots \dots \dots (85)$$

$$\omega_m = \xi \cdot \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu \cdot L}{b} + 1}} \cdot \sqrt{2g \cdot \frac{p_1 - p_2}{\gamma}} \dots \dots (86)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu \cdot L}{b} + 1}} \dots \dots \dots (87)$$

bzw.

$$V' = F_0 \cdot \omega_m = \pi \cdot D_m \cdot b \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu \cdot L}{b} + 1}} \cdot \sqrt{2g \cdot \frac{p_1 - p_2}{\gamma}} \dots (88)$$

Um V' bei gegebenem Druckgefälle möglichst klein zu erhalten, muß μ , der Turbulenzfaktor, und L , die Spaltlänge möglichst groß, D , besonders aber b , die Spaltbreite, möglichst klein gemacht werden. Es berechnet sich z. B. für den einfachen Ringspalt mit $b = 0,15 \text{ mm}$, $L = 30 \text{ mm}$, $\mu = 0,0400^1$, ξ zu: $= 0,333$.

Seine Größe kann durch eine entsprechende Kombination von Ringspalten, wie sie z. B. in Fig. 16 dargestellt ist, beliebig vermindert werden.

Aus Gleichung (88) ist ersichtlich, daß sich der Spaltverlust bei Verminderung der Spaltbreite ungefähr proportional $b^{3/2}$ ändert:

$$\frac{V'}{V''} = \left(\frac{b'}{b''}\right)^{3/2} \dots \dots \dots (89)$$

Daraus ergibt sich die energischere Wirkung vermindertener Spaltbreiten gegenüber einer Vergrößerung von L , und μ bzw. einer Verkleinerung von D_m in bezug auf Herabsetzung des Spaltverlustes²⁾.

¹⁾ Der relativ hohe Wert für μ ist hier bedingt durch die praktische Unmöglichkeit, derart enge Spalten mit vollkommen gleichmäßiger Breite herzustellen. Diese Breite wird, besonders unter den unvermeidlichen Erzitterungen des Betriebes, längs des Wasserweges relativ beträchtliche Verschiedenheiten aufweisen und dadurch den Wert des Widerstandskoeffizienten erhöhen.

²⁾ Siehe E. Becker, Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten und ihre Beziehungen zum Poiseuilleschen Gesetz. Mitteilungen über Forschungsarbeiten V. D. I., Heft 48, 1907.

In offenen Wasserläufen (Strömen, Bächen, offenen Kanälen, Gräben und Gerinnen) ist fast ausnahmslos der turbulente Bewegungszustand gegeben. Es gelten demnach auch hier Beziehungen für die Geschwindigkeitsverteilung über den Stromquerschnitt bzw. für den Druckhöhenverlust, die den für die Strömung in zylindrischen Röhren abgeleiteten analog sind, wobei jedoch folgende Umstände besonders berücksichtigt werden müssen:

1. Das Querschnittsprofil ist im allgemeinen von beträchtlicher Unregelmäßigkeit.
2. Der Reibungskoeffizient der Turbulenz (Turbulenzfaktor) hat örtlich starke Veränderlichkeit.
3. Mit der freien Oberfläche verändert sich die durch die turbulente Strömung hervorgerufene Pulsationsbewegung gegenüber der in zylindrischen Röhren auftretenden.
4. Die Strömung steht unter dem Einflusse der Wandreibung längs des benetzten Umfangs und unter dem Einflusse des Luftwiderstandes an der freien Oberfläche.

Die Unregelmäßigkeiten des Querschnittsprofils haben zur Folge, daß die Lage der Höchstgeschwindigkeit im Stromquerschnitte, und mit ihr die Geschwindigkeitsverteilung längs des Stromweges fortwährend wechselt. Die Geschwindigkeitsverteilung läßt sich in jedem Querschnitte darstellen durch ein Geschwindigkeitsvolumen, das durch die Summierung sämtlicher, den Punkt höchster Geschwindigkeit mit den Punkten des Umfangs verbindender Geschwindigkeitshalbellipsen erhalten wird. Ist nun die Querschnittsform sehr unregelmäßig, so werden aufeinanderfolgenden Punkten des Querschnittes sehr verschiedene Geschwindigkeitswerte entsprechen. Es wird sich natürlich trotzdem ein stationärer Strömungszustand unter Ausgleichung dieser endlichen Geschwindigkeitsunterschiede einstellen, doch werden die damit verbundenen Wirbel und Sekundärbewegungen die analytische Feststellung der schließlichen Geschwindigkeitsverteilung sehr erschweren, wenn nicht unmöglich machen. Darauf ist wohl auch das Scheitern aller bisherigen Bemühungen zurückzuführen, für die Strömungsverhältnisse in offenen Flußläufen allgemein gültige Beziehungen aufzustellen. Dazu kommt noch, daß, selbst bei angenähert gleichförmiger mittlerer Stromgeschwindigkeit, sich der Turbulenzfaktor auf dem Stromwege meist beträchtlich mit der Beschaffenheit der Uferwandungen und des Flußbettes ändert. Unsere für die Strömung in Röhren

abgeleitete Beziehung für den Druckhöhenverlust ist daher bei offenen Flußläufen bloß als Integralformel brauchbar:

$$\chi \int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{h_w}{s_2 - s_1} = \frac{12}{7} \cdot \frac{\omega_{zm}^2}{2g} \frac{\int_{s_1}^{s_2} \mu \cdot ds}{\int_{s_1}^{s_2} R \cdot ds} \quad \dots \quad (90)$$

wobei χ das Gefälle bedeutet und μ (der Turbulenzfaktor) bzw. R (der hydraulische Radius) als Funktionen des Stromweges s zu bestimmen sind. Da indessen bei gleichförmiger Strömung der Druckhöhenverlust durch das Spiegelgefälle gerade gedeckt wird, ist die Veränderlichkeit des letzteren gleichzeitig ein Maß für die Veränderlichkeit der beiden Größen μ und R längs des Stromweges. Die große örtliche Veränderlichkeit des Turbulenzfaktors hat, wie in zylindrischen Röhren, Rotationsbewegungen zur Folge, welche die Unstabilität der Geschwindigkeitsverteilung noch vermehren.

Aus Gleichung (90) ergibt sich die mittlere Profilvergeschwindigkeit bei gleichförmiger Strömung zu

$$\overline{\omega_{zm}} = \sqrt{\frac{7g}{6} \cdot \frac{\int_{s_1}^{s_2} R \cdot ds}{\int_{s_1}^{s_2} \mu \cdot ds}} \cdot \chi \quad \dots \quad (90a)$$

bzw. wenn μ und R für die betrachtete Stromstärke als konstant angenommen werden können

$$\overline{\omega_{zm}} = \sqrt{\frac{7g}{6\mu} \cdot R \cdot \chi} \quad \dots \quad (90b)$$

Für Flüsse und Wasserläufe von großer Breite bei relativ geringer Tiefe t wird der hydraulische Radius gleich

$$R = \frac{F}{U} = \frac{b \cdot t}{b - 2t} = t$$

und somit

$$\overline{\omega_{zm}} = \sqrt{\frac{7g}{6\mu} \cdot t \cdot \chi} \quad \dots \quad (90c)$$

bzw. $\overline{\omega_z}$ gemäß unseren Ableitungen allgemein

$$\overline{\omega_z} = \sqrt{\frac{g}{\mu} \cdot t \cdot \chi \cdot \left(1,5 - \frac{y^2}{z^2}\right)} \quad \dots \quad (90d)$$

Daraus mit $y = 0$ die Höchstgeschwindigkeit in der Strömoberfläche zu

$$\omega_{z_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{\mu} \cdot t \cdot \chi} \quad \dots \quad (90e)$$

und die Sohlengeschwindigkeit zu

$$w_{zt} = \sqrt{\frac{g}{2\mu} t \cdot \chi} \quad \dots \dots \dots (90f)$$

In allen diesen Beziehungen hat μ die durch Gleichung (82) gegebene Abhängigkeit von w_{zm} und R bzw. t .

Die bei der Strömung in zylindrischen Röhren abgeleitete Pulsationsbewegung tritt auch bei der Strömung in offenen Flußläufen auf, wenngleich in etwas veränderter Form, die sich daraus ergibt, daß hier die Strömung nicht wie dort unter einem hydraulischen Drucke, sondern bloß unter der Wirkung des natürlichen Sohlen- bzw. Spiegelgefälles steht.

Angenommen, der gleichförmig fließende Strom habe ein Spiegelgefälle gleich dem Sohlengefälle χ , welches letzteres gerade zur Deckung des mittleren Druckhöhenverlustes über den Querschnitt genügt. Da nun der Verzögerungsdruck und damit der örtliche Druckabfall, ähnlich wie bei Röhren, an den festen Begrenzungswänden am größten ist, und gegen die Achse der Strömung bzw. gegen deren Oberfläche auf Null abnimmt, so wird, bei gleichbleibendem Gefälle, die Geschwindigkeit an den festen Wänden gegenüber der im Innern des Querschnittes verzögert. Dies hat, wegen der Kontinuitätsbedingung Gleichung (3), das Auftreten einer Radialgeschwindigkeit zur Folge, die ihrerseits wieder eine Verminderung der Achsialgeschwindigkeit im übrigen Teile des Profils bewirkt, so daß schließlich eine Verzögerung sämtlicher Axialkomponenten der Stromgeschwindigkeiten des Querschnittes, bzw. ein momentanes Anstauen der Wasserspiegelhöhe h eintritt. Durch die Verzögerung der mittleren Stromgeschwindigkeit wird aber sofort wieder der Druckhöhenverlust verkleinert, wodurch das bestehende Sohlengefälle momentan größer wird als dem Druckhöhenverluste entspricht, und eine momentane Beschleunigung bzw. Spiegelsenkung resultiert. Diese Pulsationen sind, wie bei der Strömung in Röhren, als Superposition zweier, in der Phase um $\pi = 180^\circ$ verschobener, harmonischer Schwingungen von gleicher Amplitude und Schwingungsdauer aufzufassen. Während aber im Falle der Strömung im Rohre zuerst der Druckabfall an der Rohrwand bzw. Radialbewegung und dann Verzögerung der Hauptbewegung eintrat, verläuft der Vorgang hier gerade umgekehrt.

Aus allen bisher durchgeführten Geschwindigkeitsmessungen in Flußläufen, offenen Kanälen und Gerinnen ergibt sich die merkwürdige Tatsache, daß die Höchstgeschwindigkeit des Profiles nicht, wie dies zu erwarten wäre, in der Stromoberfläche, sondern etwas unterhalb derselben auftritt, eine Entfernung, die mit der Größe der Wandrauigkeit zunimmt. Fig. 17. Die

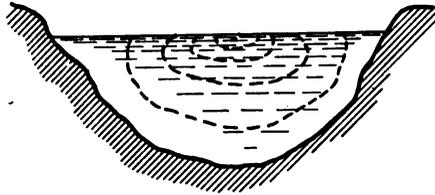


Fig. 17.

Ursachen für diese Erscheinung sind einerseits durch die Pulsationsbewegung, anderseits durch den Einfluß des Luftwiderstandes an der Stromoberfläche gegeben.

Wir haben oben gesehen, daß die Pulsationsbewegung ein periodisches Anstauen und Absenken des Stromspiegels bewirkt. Bei diesem, wengleich nur sehr kleinen Stau, wird an der freien Oberfläche eine gewisse Anzahl der Flüssigkeitsteilchen nach rückwärts, d. h. entgegen der Strömungsrichtung des Flusses, abfließen und dabei die in der Stromrichtung nachfolgenden Stromelemente verzögern. Diese Verzögerung erstreckt sich, durch innere Reibung übertragen, auch auf die unmittelbar unter der Stromoberfläche strömenden Schichten, wobei sie mit zunehmender Entfernung abnimmt. Es wird demnach dieser Sekundärverlust, addiert zu dem Pulsationsverlust ein Minimum ergeben für einen Punkt des Profiles, der unterhalb der Stromoberfläche liegt und in welchem die Höchstgeschwindigkeit auftritt. Diese Entfernung wird mit der Größe des Turbulenzfaktors wachsen, da durch ihn auch die Größe des Momentan-Staues bzw. die des Sekundärverlustes bestimmt ist.

Der Einfluß des Luftwiderstandes an der Oberfläche auf die Geschwindigkeitsverteilung im Profile läßt sich aus folgender Überlegung erkennen:

Denken wir uns, ein Strom von rechteckigem Profile wäre an allen Seiten von einer Lufthaut umgeben. Dann ist der Widerstand an allen Grenzsichten gleich groß und die Geschwindig-

keitsverteilung besteht, ähnlich wie im Falle des oben besprochenen, geschlossenen, rechteckigen Kanals, mit der Höchstgeschwindigkeit in der Stromachse. Wenn wir uns nun je zwei gegenüberliegende Luftwände durch feste Wände ersetzt denken, so tritt in der Lage der Höchstgeschwindigkeit im Profile keine Änderung ein. Ersetzen wir indessen drei der Luftwände durch feste Begrenzungen, so kann offenbar nur Gleichgewicht der Widerstandskräfte herrschen, wenn angenähert

$$\frac{\mu_1}{2} \cdot \frac{\omega_{zm}^2}{2g(t-y)} = \frac{\mu_2}{2} \cdot \frac{\omega_{zm}'^2}{2g \cdot y} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \dots \dots (91)$$

ist, wobei μ_1 den Turbulenzfaktor zwischen Wasser und Flußbett, μ_2 jenen zwischen Wasser und Luft bedeutet. ω_{zm} ist die mittlere Stromgeschwindigkeit im Profile, ω_{zm}' die mittlere Relativgeschwindigkeit zwischen Wasser und Luft an der Stromoberfläche (bei ruhiger Luft ist $\omega_{z0} = \omega_{zm}'$), t der hydraulische Radius, gleich $\frac{F}{U}$, (gleich der Flußtiefe bei flachem Stromquerschnitte), y der Abstand des Punktes höchster Geschwindigkeit von der Stromoberfläche des Querschnittes, γ_2 das spezifische Gewicht der Luft, und γ_1 das spezifische Gewicht des Wassers. Aus Gleichung (91) ergibt sich

$$y = \frac{\gamma_2 \mu_2 \omega_{zm}'^2}{\gamma_1 \mu_1 \omega_{zm}^2 + \gamma_2 \mu_2 \omega_{zm}'^2} \cdot t \dots \dots (92)$$

Daraus läßt sich nach experimenteller Bestimmung von μ_2 , die dem Luftreibungswiderstande allein entsprechende Tiefe y berechnen.

Gewöhnlich hat jedoch, infolge der an der Wasseroberfläche auftretenden Temperaturunterschiede, die Luft daselbst eine der Flußgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtete Strömungsgeschwindigkeit, so daß der nach Gleichung (92) berechnete Wert von y entsprechend größer ausfallen würde.

Die Wirkung der Luftreibung in offenen Flußläufen ergibt demnach eine zusätzliche Verschiebung des Punktes höchster Profilvergeschwindigkeit unter die Stromoberfläche.

II. Abschnitt.

Die Strömung in verengten, bzw. erweiterten Kanälen.

Zu Strömungen dieser Art gehören alle in der Natur und Technik vorkommenden Strömungen mit stetiger Querschnittsänderung, wie z. B. die Profilübergänge bei Flußregulierungen, die Strömungen in Düsen, in Diffusoren usw.

Setzen wir zunächst wieder reibungs- und wirbelfreie Strömung voraus, so können wir uns dieselbe im verengten bzw. erweiterten Kanäle so vorstellen, daß sämtliche Flüssigkeitsteilchen auf einen, durch die momentane Neigung der Begrenzungswände des Kanales gegen die Kanalachse gegebenen Mittelpunkt zufließen bzw. von diesem abströmen. Beim geraden rechteckigen Kanal mit nur einem Paare divergierender Begrenzungswände

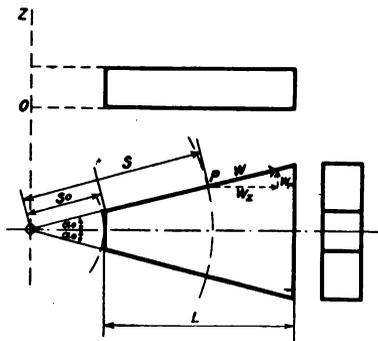


Fig. 18.

(Fig. 18) liegen diese Mittelpunkte für jede horizontale Niveauebene in der zur Kanalachse im Punkte 0 senkrechten Schnittgeraden der Begrenzungswände, während sie beim pyramiden bzw. kegelförmig erweiterten Kanäle sämtlich in der Spitze der Begrenzungspyramide bzw. des Begrenzungskegels zusammenfallen (Fig. 19 und Fig. 20). Einer solchen Strömung werden in gleichen Abständen

vom Strömungsmittelpunkt 0 gleiche Geschwindigkeiten bzw. gleiche Drücke entsprechen, so daß die innerhalb der Kanalgrenzen fallenden Mantelflächen der Kreiszyylinder um die Mittelpunktsachse OZ im ersten Falle, bzw. der Kugeln um den Mittelpunkt 0 im zweiten und dritten Falle Querschnittsflächen

und gleichzeitig Niveaulächen der Geschwindigkeit bzw. des Druckes für die betrachteten Strömungen sind.

Wir wollen nun diese Strömungen zunächst für den prismatisch erweiterten Kanal (Fig. 18) und dann für den pyramiden-

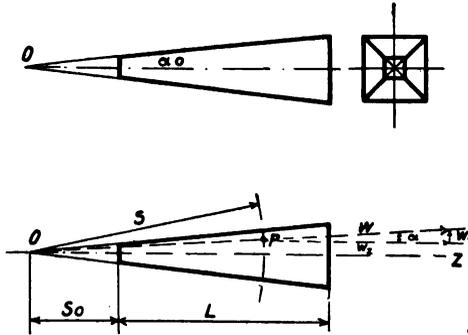


Fig. 19.

bzw. kegelförmig erweiterten Kanal (Fig. 19 u. 20) analytisch behandeln.

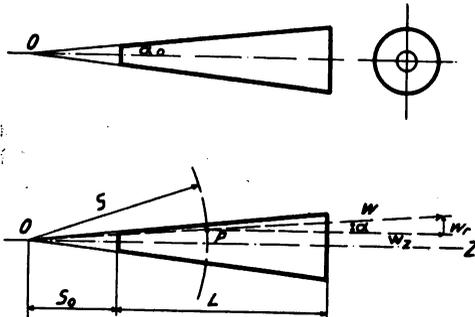


Fig. 20.

Für den ersteren gilt nach obigem die Beziehung

$$w \cdot s = \text{konstant.} \quad \dots \quad (1)$$

wobei s den Abstand eines beliebigen Strompunktes von der Mittelpunktsachse OZ , w seine Absolutgeschwindigkeit bedeutet. Bezeichnen wir die Kanalachse als x -Achse, so gilt für die ebene zweidimensionale Strömung:

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$s^2 = x^2 + y^2 \quad \dots \quad (3)$$

womit Gleichung (1) lautet

$$(\omega_x^2 + \omega_y^2) \cdot (x^2 + y^2) = k_1 \dots \dots \dots (1a)$$

Ist die Divergenz der Begrenzungswände konstant nach der Kanalachse, so gilt, gemäß Fig. 18, in jedem Querschnittspunkte die Beziehung

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (4)$$

bzw.

$$\omega_y^2 = \omega_x^2 \cdot \frac{y^2}{x^2} \dots \dots \dots (4a)$$

Damit geht Gleichung (1a) über in

$$\omega_x^2 \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2} = k_1 \dots \dots \dots (5)$$

Daraus ist

$$\omega_x = \frac{k_2 \cdot x}{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (6)$$

$$\omega_y = \frac{k_2 \cdot y}{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (7)$$

Die Kontinuitätsbedingung lautet

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

bzw. in unserem Falle mit $\omega_z = 0$,

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (8a)$$

welcher Beziehung die Werte der Gleichung (6) und (7) genügen. Da ferner die Ansätze bestehen:

$$\varepsilon_x = 0,$$

$$\varepsilon_y = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right\} = 0,$$

verläuft die Strömung als wirbelfreie Potentialströmung. Für eine solche ist auch

$$\omega_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dots \dots \dots (6a)$$

$$\omega_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \dots \dots \dots (7a)$$

woraus sich die Stromfunktion φ , bzw. das Geschwindigkeitspotential Φ , berechnet zu

$$\varphi = k_2 \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \dots \dots \dots (9)$$

$$\Phi = \frac{k_2}{2} \ln(x^2 + y^2) \dots \dots \dots (10)$$

Aus Gleichung (1) ist zu ersehen, daß für $s = 0$, $\omega = \infty$ wird. D. h.: Die Punkte der Mittelpunktsachse OZ treten als »Quellen« bzw. »Senken« auf, sind also für die tatsächliche Strömung als Punkte gestörter Kontinuität von der Strömung selbst auszuschalten.

Aus den Fundamentalgleichungen für die stationäre reibungs- und wirbelfreie Strömung

$$\left. \begin{aligned} q_x - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} &= \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \\ q_y - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} &= \omega_x \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \\ q_z - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} &= \omega_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

bestimmt sich, unter Ausschaltung der Wirkung der Schwerkraft, mit $q_x = q_y = q_z = 0$, und $\omega_z = 0$,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} &= \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} &= \omega_x \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{g}{\gamma} \cdot p &= \int -\frac{g}{\gamma} \cdot \left\{ \frac{\partial p_x}{\partial x} dx + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right\} = k_0 - \frac{k_2^2}{2(x^2 + y^2)} = \\ &= k_0 - \frac{k_2^2}{2 \cdot s^2} = k_0 - \frac{\omega^2}{2} \dots \dots (13) \end{aligned}$$

wobei sich die Konstante k_0 bestimmt aus der Beziehung:

$$\frac{g}{\gamma} p_0 + \frac{\omega_0^2}{2} = k_0 \dots \dots \dots (13a)$$

Die aus (13) bestimmte Druckkurve ist in Fig. 21 dargestellt. Für $s = 0$ wird der Druck negativ unendlich. Für s gleich unendlich nähert er sich asymptotisch dem Werte k_0 .

Der durch Versuche festgestellte Stromverlauf zeigt nun sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilung als auch der Druckverteilung von dem hier abgeleiteten, theoretischen, gewisse

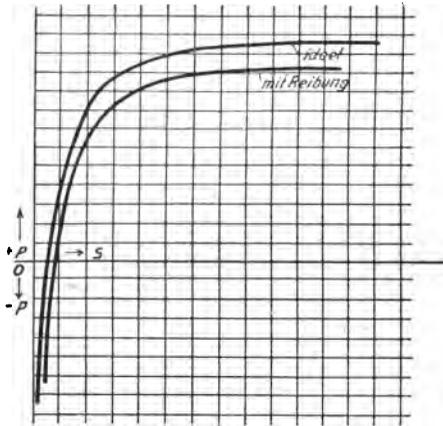


Fig. 21.

Abweichungen, die im Falle der Strömung im verengten Kanäle, (beschleunigte Bewegung), geringer sind als bei Strömung durch erweiterte Querschnitte, (verzögerte Bewegung). Die Ursache ist der Einfluß der Wandreibung, der hier analog wie bei der Strömung im zylindrischen Rohre zur Wirkung kommt.

Wenn wir die innerhalb der Kanalgrenzen enthaltene Zylindermantelfläche in der Entfernung s vom Koordinatenursprung in die Ebene abwickeln und die Geschwindigkeiten nach der im

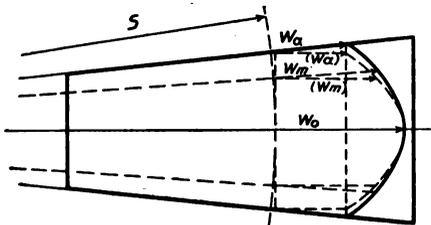


Fig. 22.

vorhergehenden Abschnitte gezeigten Weise über den abgewickelten Stromquerschnitt verteilen, so erhalten wir wieder als Geschwindigkeitskurve eine Ellipse, deren eine Halbachse die Höchstgeschwindigkeit des Querschnittes

und deren andere Halbachse gleich dem 1,225fachen des halben Bogens ist. Wir erhalten demnach (Fig. 22) für die Geschwindigkeit w' die Beziehung:

$$\omega' = \frac{\omega_m'}{s \pi \frac{\alpha_0}{180}} \cdot \sqrt{1,5 \cdot s^2 \pi^2 \left(\frac{\alpha_0}{180}\right)^2 - \rho^2} \quad \dots (14)$$

Dabei ist α_0 der Winkel in Graden, den die divergente Begrenzungs wand mit der x -Achse einschließt, ρ die längs des Bogens gemessene Entfernung x des betrachteten Querschnittspunktes vom Schnittpunkte A des Bogens mit der x -Achse. Es ist demnach

$$\rho = s \cdot \pi \cdot \frac{a}{180} \quad \dots \dots \dots (15)$$

bzw.

$$\omega' = \frac{\omega_m'}{\alpha_0} \cdot \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - a^2} \quad \dots \dots \dots (14a)$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} \\ \alpha^0 &= \frac{180}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \\ &= 4 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

läßt sich Gleichung (14a) auch schreiben

$$\omega' = \omega_m' \cdot \frac{\sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)^2 \cdot 4^2}}{\alpha_0} \quad \dots \dots (14b)$$

ω_m' bestimmt sich aus der Kontinuitätsbedingung (vgl. Fig. 18)

$$\omega_{m0}' \cdot s_0 = \omega_m' \cdot s \quad \dots \dots \dots (1a)$$

zu

$$\omega_m' = \frac{\omega_{m0}' \cdot s_0}{s} = \frac{\omega_{m0}' \cdot s_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \dots \dots \dots (17)$$

Damit wird

$$\omega'^2 = (\omega_x'^2 - \omega_y'^2) = \frac{\omega_{m0}'^2 \cdot s_0^2}{\alpha_0^2 (x^2 + y^2)} \cdot \left(1,5 \alpha_0^2 - \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)^2 \cdot 4^2 \right) (14c)$$

Nun ist, wie früher,

$$\omega_y' = \omega_x' \cdot \frac{y}{x}$$

womit sich ergibt

$$\omega_x' = \frac{\omega_{m0}' \cdot s_0 \cdot x}{\alpha_0 \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot 2^2 \quad (18)$$

$$\omega_y' = \frac{\omega_{m0}' \cdot s_0 \cdot y}{\alpha_0 \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot 2^2 \quad (19)$$

Wegen der Kleinheit der im allgemeinen bei diesen Strömungen verwendeten Divergenzwinkel ($\alpha_0^0 = 3^0 - 6^0$) können wir unbedenklich

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

setzen, so daß wir erhalten

$$\frac{\partial 2'}{\partial y} = \omega_x' = \frac{k_3}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 - k_4 \cdot y^2} \quad (18a)$$

$$-\frac{\partial 2'}{\partial x} = \omega_y' = \frac{k_5 \cdot y}{x(x^2 + y^2)} \cdot \sqrt{k_6 x^2 - y^2} \quad (19a)$$

Damit kann aus

$$\partial 2' = \frac{\partial 2'}{\partial x} dx + \frac{\partial 2'}{\partial y} dy$$

die Stromfunktion $2'$ berechnet werden. Wegen Auftretens einer Wirbelkomponente ε_z

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_x'}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y'}{\partial x} \right) > 0$$

existiert kein Geschwindigkeitspotential. Eine Ausnahme bilden die Punkte der Kanalachse für die mit $y = 0$ ein Potential wie bei der oben besprochenen reibungsfreien Bewegung gemäß Gleichung (10) besteht.

Das Differentiale des Reibungsverlustes nach dem Reibungswege bestimmt sich wie folgt:

$$\frac{d p_{el}}{d s} = h_w = \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{\omega' m^2}{2 g} \cdot \frac{U}{F} = \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{2 \left(b + s \pi \cdot \frac{\alpha_0}{180} \right)}{b \cdot s \cdot \pi \cdot \frac{\alpha_0}{180}} \cdot \frac{\omega_m'^2}{2 g} \quad (20)$$

bzw. unter Einsetzung des Wertes für ω_m' aus Gleichung (17)

$$h_w = \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{s_0^2 \cdot \omega_{m0}'^2}{2 g} \cdot \frac{2 \left(b + s \pi \cdot \frac{\alpha_0}{180} \right)}{b \cdot s^3 \cdot \pi \cdot \frac{180}{\alpha_0}} \quad (20a)$$

wobei μ_s den mit dem Wege veränderlichen Turbulenzfaktor bedeutet. Aus Gleichung (20a) bestimmt sich das Verlustdruckgefälle zwischen den Grenzen s_0 und s_1 zu

$$h_w^{(s_1 - s_0)} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mu_s \cdot ds}{s_1 - s_0} \cdot \frac{s_0^2 \cdot \omega_{m0}'^2 \cdot 180}{2g \cdot b \cdot \pi \cdot \alpha_0} \cdot \int_{s_0}^{s_1} \frac{\left(b + s \pi \cdot \frac{\alpha_0}{180}\right) \cdot ds}{s^3} \quad (21)$$

in welcher Gleichung h_w der höchsten mittleren Querschnittsgeschwindigkeit im Kanale proportional ist. Bezeichnet

$$\frac{\omega_{m0}'^2 - \omega_m'^2}{2g} = h_{id} \quad \dots \quad (22)$$

die ideelle im divergenten Kanale erzeugte Verzögerungsdruckhöhe, gemessen im Querschnitte F , so läßt sich Gleichung (21) wegen

$$\omega_m' \cdot s = \omega_{m0}' \cdot s_0$$

bzw.

$$\frac{\omega_{m0}'^2 - \omega_m'^2}{2g} = \frac{\omega_{m0}'^2}{2g} \left(1 - \frac{s_0^2}{s^2}\right) = h_{id} \quad \dots \quad (22a)$$

auch schreiben:

$$h_w^{(s_1 - s_0)} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} \mu_s \cdot ds}{s_1 - s_0} \cdot \frac{s_0^2 \cdot 180}{b \cdot \pi \cdot \alpha_0} \cdot \frac{s^2}{s^2 - s_0^2} \left\{ \left(\frac{s^2}{2s_0^2} + \frac{\pi \alpha_0}{180 s_0} \right) - \left(\frac{b}{2s^2} + \frac{\pi \alpha_0}{180 s} \right) \right\} h_{id} \quad \dots \quad (21a)$$

Wenn also nur die Wandreibung störend auf die Energieumsetzung im erweiterten bzw. verengten Kanale einwirken würde, ergäbe die Kurve

$$h_{id}^{(R)} = h_{id} - h_w^{(s_1 - s_0)} \quad \dots \quad (23)$$

schon die in den Kanalquerschnitten auftretenden Verzögerungsdruckhöhen (Fig. 21). In dieser Form wurde sie von mehreren Experimentatoren wie Andres¹⁾ und Hochschild²⁾ aus den Versuchen bestimmt, wobei sich ergibt, daß die aus Gleichung

¹⁾ K. Andres, Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck, Z. V.D.I. 1910, S. 1585.

²⁾ H. Hochschild, Versuche über die Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, V. D. I., Heft 114.

(21a) berechnete Verlusthöhe beim verengten Kanale tatsächlich den aus den Versuchen bestimmten Verlustwerten entspricht. Im verengten Kanale (Düse, usw.) sind daher die Energieverluste einzig durch die Wandreibung bestimmt.

Für den pyramiden- bzw. kegelförmigen Kanal besteht die Beziehung

$$\omega \cdot s^2 = \text{konstant} \dots \dots \dots (24)$$

Mit der Einführung von Zylinderkoordinaten, wobei die Kanalachse mit der z-Achse zusammenfällt, ergibt sich bei Fortfall der Rotation, $\omega_n = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_r^2 + \omega_z^2 \\ s^2 &= z^2 + r^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

bzw.

$$(\omega_r^2 + \omega_z^2) \cdot (z^2 + r^2) = k_1' \dots \dots \dots 4a)$$

Mit

$$\omega_r = \frac{r}{z} \cdot \omega_z \dots \dots \dots (26)$$

ergibt sich aus Gleichung (24a)

$$\omega_z = \frac{k_2' \cdot z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \dots \dots \dots (27)$$

$$\omega_r = \frac{k_2' \cdot r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \dots \dots \dots (28)$$

Nun ist

$$\omega_z \cdot r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \dots \dots \dots (27a)$$

$$\omega_r \cdot r = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \dots \dots \dots (28a)$$

womit die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial (\omega_z \cdot r)}{\partial z} = 0$$

erfüllt ist.

Aus Gleichung (27a) und (28a) folgt

$$\mathcal{L} = - \frac{k_2' \cdot z}{\sqrt{(z^2 + r^2)}} \dots \dots \dots (29)$$

als Stromfunktion für die betrachtete Strömung. Wegen

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \varepsilon_n &= 0 \end{aligned}$$

existiert ein Geschwindigkeitspotential, welches sich aus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

bestimmt zu -

$$\Phi = -\frac{k_2'}{\sqrt{(z^2 + r^2)}} \dots \dots \dots (31)$$

Der Flüssigkeitsdruck bestimmt sich aus den Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} q_r - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= \omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\omega_n^2}{r} \\ q_n \cdot r &= \omega_r \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{\partial z} \\ q_z - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \omega_r \cdot \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

Mit

$$q_r = q_n = q_z = 0, \quad \omega_n = 0$$

ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= \omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \omega_z \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial z} \\ -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \omega_z \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots (32a)$$

bzw. nach Einsetzen der Werte für ω_r und ω_z bzw. deren partiellen Differentialquotienten

$$\left. \begin{aligned} -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{k_2'^2 \cdot r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{k_2'^2 \cdot z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (32b)$$

Daraus

$$\frac{g}{\gamma} p = k_0 - \frac{k_2'^2}{2s^2} = k_0 - \frac{\omega^2}{2} \dots \dots \dots (33)$$

wie bei der erstbetrachteten Strömung. Die Kugelflächen um den Mittelpunkt des pyramiden- bzw. kegelförmigen Kanales sind demnach gleichzeitig Niveaulächen des Druckes und der Geschwindigkeit für die behandelte Strömung.

Gegenüber der in obigem abgeleiteten Bewegung findet die tatsächliche Strömung unter dem Einfluß der Wandreibung statt. Wir haben daher ähnlich wie beim prismatisch erweiterten Kanale diesen Einfluß bei der Verteilung der Geschwindigkeitswerte über den Stromquerschnitt auch hier zu berücksichtigen. Wir bekommen diese Verteilung wie früher aus den analogen Beziehungen:

$$\omega' = \frac{\omega_m'}{s \cdot \pi \frac{\alpha_0}{180}} \cdot \sqrt{1,5 \left(s \pi \frac{\alpha_0}{180} \right)^2 - \varrho^2} \quad \dots (14')$$

$$\varrho = s \cdot \pi \frac{\alpha}{180} \quad \dots \dots \dots (15')$$

$$\omega' = \frac{\omega_m'}{\alpha_0} \cdot \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \alpha^2} \quad \dots \dots \dots (14a')$$

$$\alpha^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \arctg \frac{r}{z} = 4 \cdot \arctg \frac{r}{z} \quad \dots \dots (16')$$

$$\omega' = \frac{\omega_m'}{\alpha^0} \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \arctg \left(\frac{r}{z} \right)^2} \cdot 2^2 \quad \dots (14b')$$

ω_m' bestimmt sich aus

$$\omega_m' \cdot s^2 = \omega_{m0}' \cdot s_0^2$$

zu

$$\omega_m' = \frac{s_0^2}{s^2} \omega_{m0}' \quad \dots \dots \dots (17')$$

Damit wird

$$\omega'^2 = (\omega_r'^2 + \omega_z'^2) = \frac{s_0^4 \cdot \omega_{m0}'^2}{(z^2 + r^2)^2 \cdot \alpha_0} \cdot (1,5 \alpha_0^2 - 2 \arctg \left(\frac{r}{z} \right)^2) \cdot 2^2 (14c)$$

Für $\omega_r' = \frac{r}{z} \cdot \omega_z'$ ergibt Gleichung (14')

$$\omega_r' = \frac{s_0^2 \cdot \omega_{m0}' \cdot r}{(z^2 + r^2) \cdot \alpha_0} \cdot \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \arctg \left(\frac{r}{z} \right)^2} \cdot 2^2 \quad \dots (18')$$

$$\omega_z' = \frac{s_0^2 \cdot \omega_{m0}' \cdot z}{(z^2 + r^2) \cdot \alpha_0} \cdot \sqrt{1,5 \alpha_0^2 - \arctg \left(\frac{r}{z} \right)^2} \cdot 2^2 \quad \dots (19')$$

Auch hier können wir wegen der Kleinheit der Divergenzwinkel $\arctg \left(\frac{r}{z} \right)^2$ durch $\left(\frac{r}{z} \right)^2$ ersetzen, wodurch aus

$$\omega_z \cdot r = \frac{\partial 2'}{\partial r} \quad \dots \dots \dots (18a')$$

$$\omega_r \cdot r = - \frac{\partial 2'}{\partial z} \quad \dots \dots \dots (19a')$$

die Stromfunktion ψ' beinstimmbar ist. Ein Geschwindigkeitspotential existiert hier, wie oben, wegen des auftretenden Ringwirbels s_z , bloß für die Kanalachse (Gleichung (31)).

Das Differentiale des Reibungsgefälles bestimmt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{d p_e}{d s} = h_w' &= \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{\omega_m'^2}{2g} \cdot \frac{U}{F} = \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{\omega_m'^2}{2g} \cdot \frac{2^2 \pi \cdot s \cdot \sin \alpha_0}{4 s^2 \cdot \pi \cdot \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}} = \\ &= \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{\omega_m'^2}{2g} \cdot \frac{\cot g \frac{\alpha_0}{2}}{s} \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen des Wertes, Gleichung (17'), für ω_m' ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d p_e}{d s} = h_w' &= \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{s_0^4}{s^4} \cdot \frac{\omega_{m0}'^2}{2g} \cdot \frac{\cot g \frac{\alpha_0}{2}}{s} = \\ &= \frac{\mu_s}{2} \cdot \frac{s_0^4 \cdot \cot g \frac{\alpha_0}{2}}{s^5} \cdot \frac{\omega_{m0}'^2}{2g} \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

Daraus der Reibungsverlust auf die Länge L : $L = (s_1 - s_0)$:

$$\begin{aligned} p_e = h_w^{(s_1 - s_0)} &= \int h_w' \cdot d s = \\ &= \int \frac{\mu_s \cdot d s}{2(s_1 - s_0)} \cdot \frac{3 \cot g \frac{\alpha_0}{2}}{4} \cdot \frac{s^4 - s_0^4}{s^4} \cdot \frac{\omega_{m0}'^2}{2g} \dots \dots (36) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir wieder h_{id} als ideale Verzögerungsdruckhöhe, so gilt

$$\frac{\omega_{m0}'^2 - \omega_m'^2}{2g} = h_{id} \dots \dots \dots (37)$$

bzw. wegen Gleichung (23)

$$\omega_{m0}' s_0^2 = \omega_m' \cdot s^2 = \text{konst.}$$

$$\omega_m' = \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \omega_{m0}'$$

$$\left(1 - \frac{s_0^4}{s^4}\right) \cdot \frac{\omega_{m0}'^2}{2g} = h_{id} = \dots \dots \dots (37a)$$

$$= \left(\frac{s^4}{s_0^4} - 1\right) \frac{\omega_{m0}'^2}{2g}.$$

Damit geht Gleichung (36) über in

$$h_w^{(s_1-s_0)} = \frac{\int \mu_s ds}{2(s_1-s_0)} \cdot \frac{3 \cdot \cot \frac{\alpha_0}{2}}{4} \cdot h_{id} \dots \dots \dots (36a)$$

Gleichung (36a) besagt, daß der Druckhöhenverlust durch Wandreibung in kegelförmig erweiterten bzw. verengten Kanälen, abgesehen von der geringen Veränderlichkeit des Turbulenzfaktors, in einer konstanten Proportionalität zur ideellen Verzögerungsdruckhöhe steht, bzw., daß bei konstantem Turbulenzfaktor der Reibungsverlust, in Prozenten der ideellen Verzögerungsdruckhöhe, unabhängig ist von der Länge des Rohres. Da indessen wegen Gleichung (82) des vorhergehenden Abschnittes¹⁾ der Wert für μ_s mit zunehmender Länge des erweiterten Rohres kleiner wird, folgt, soweit bloß der Wandreibungsverlust in Frage kommt, eine Zunahme des Wirkungsgrades mit zunehmender Länge des Kanales. Die nach Gleichung (36a) berechnete Druckkurve

$$h_{id}^{(R)} = h_{id} - h_w^{(R)},$$

Fig. 21, stimmt mit der von Andres aus den Versuchen an konisch konvergenten Röhren gefundenen Verzögerungsdruckhöhe vollkommen überein (Fig. 23), so daß, wie bei der prismatischen Kanalforn, auch hier die konvergente Strömung bloß von der Wandreibung beeinflußt wird. Da hierbei die Verluste in beiden Fällen in jedem Punkte eines betrachteten Stromquerschnittes gleichgroß sind, während die Widerstandskräfte der Wandreibung bloß an den Grenzschichten angreifen, so ist anzunehmen, daß der Energieausgleich über den Stromquerschnitt, analog wie bei der Strömung im zylindrischen Rohre, durch das Auftreten von Pulsationsbewegungen der strömenden Flüssigkeit aufrechterhalten wird.

Der Unterschied zwischen der Strömung im verengten und der im erweiterten Kanale besteht nun darin, daß bei der ersteren die konvergierenden Begrenzungswände eine vollkommen gleichförmige und den von uns abgeleiteten Strömungsgesetzen entsprechende Beschleunigung der strömenden Flüssigkeitselemente in der y - bzw. r -Richtung in eindeutiger Weise bewirken, während im divergierenden Kanale die Verzögerung der Flüssigkeitselemente auf verschiedene Arten erfolgen kann. Wir haben

¹⁾ Siehe S. 36.

aus unseren Ableitungen gesehen, daß solche Flüssigkeitsbewegungen beim Übergange aus der Parallelströmung in die divergente Strömung beträchtliche Radialgeschwindigkeiten aufweisen müssen, um den ihnen dargebotenen größeren Querschnitt ausfüllen zu können. Solche Radialgeschwindigkeiten können aber, den hydrodynamischen Grundgleichungen gemäß, nur durch am Flüssigkeitselemente angreifende, äußere Kräfte, (Schwerkraft,

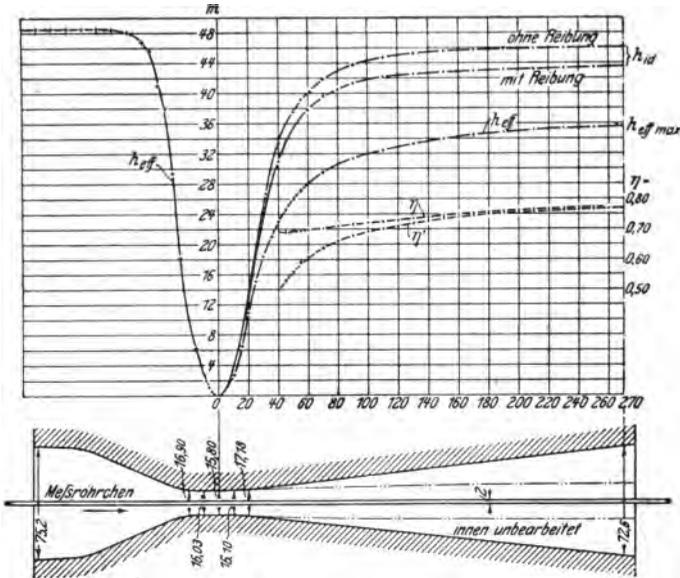


Fig. 23.

statischer Druck, Oberflächenkräfte), hervorgerufen werden. Die Art und Verteilung dieser Angriffswirkung über den Strömungsweg ist nun bei der divergenten Strömung im Gegensatz zur konvergenten Strömung nicht eindeutig bestimmt. Sie kann z. B. so erfolgen wie bei freien Strahlen, die an einer festen oder nachgiebigen Wand, verzögert bzw. abgelenkt werden, oder sie kann ähnlich erfolgen wie im konvergenten Rohre bei vollkommen gleichmäßiger Verzögerung oder endlich, sie kann während des Strömungsverlaufes teils nach der ersten, teils nach der zweiten Art auftreten. Für die Energieumsetzung am günstigsten ist die zweite Art, da sie die kleinsten endlichen Unterschiede der Geschwindigkeiten und der Geschwindigkeitsrichtungen der einzelnen Strömelemente aufweist, am ungünstigsten

die erste Art, bei der die Energieumsetzung auf kurzem Wege unter starker Wirbelbildung und Auftreten von Sekundärströmungen erfolgt. Die meisten der in der Natur und Technik vorkommenden divergenten Strömungen folgen in ihrem Verlaufe der dritten Art.

Einen klaren Einblick in diese Verhältnisse bieten die Ergebnisse der Versuche von Andres¹⁾ und Gibson²⁾ über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck. Beide Experimentatoren führten ihre Versuche an einer großen Anzahl von Kanälen der verschiedensten Form und Querschnittsverhältnisse, Andres die seinen auch mit Wasser in verschiedenen Fließzuständen durch. Als hauptsächlichstes Ergebnis fanden sich hierbei folgende Beobachtungen:

1. Am ungünstigsten verhält sich für die Energieumsetzung parallelströmendes Wasser. Da es selbst keine Radialbewegung besitzt, ist es zur Erzeugung derselben auf den Einfluß der Reibung und Wirbelung an der es in der Erweiterung umgebenden, wirbelnden Flüssigkeit angewiesen. Dieser Einfluß ist jedoch nicht hinreichend, um ein Anlegen der Hauptströmung an die Kanalwände herbeizuführen, so daß die oben besprochenen Erscheinungen der Verzögerung erster Art auftreten.

2. Den höchsten Umsetzungseffekt erzielt man mit Wasser, das schon beim Eintreten in das divergente Rohr eine kräftige tangentielle oder radiale Geschwindigkeitskomponente aufweist. Dieselben bewirken ein stetiges und sicheres Anschmiegen der Strömung an die Kanalgrenzen, so daß längs der letzteren keinerlei Sekundärbewegungen auftreten können. Dabei ist die in radialer Richtung wirksame Fliehkraft der Drehbewegung der Flüssigkeitselemente von besonders günstigem Einflusse. Die Form der Strömung entspricht demnach der Verzögerung zweiter Art.

3. Gewöhnliches, turbulent strömendes Wasser verhält sich günstiger wie parallel strömendes Wasser und ungünstiger als solches, das mit starker Radial- bzw. Drehbewegung eintritt, ge-

¹⁾ K. Andres, Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck, Mitteilungen über Forschungsarbeiten des V. D. J. 1909, Heft 76.

²⁾ Dr. A. H. Gibson, On the Resistance to flow of water through pipes or passages having divergent boundaries, Proc. Roy. Soc. A, Vol. LXXXIII 1910, p. 366. Trans. Roy. Soc. Edin, Vol. XLVIII. Part I, Nr. 5, p. 97.

hört also zu den oben erwähnten Strömungen mit Verzögerung dritter Art. Die Erklärung für dieses Verhalten liegt darin, daß turbulent strömendes Wasser infolge der ihm eigenen Pulsationsbewegung eine Radialgeschwindigkeit besitzt, die allerdings für die durch die Rohrerweiterung gegebene Radialbewegung im allgemeinen nicht ausreicht.

4. Die Gesamtverluste zerfallen in Rohrreibungsverluste und Loslösungsverluste. Die ersteren entsprechen dem unmittelbaren Einflusse der Wand- und inneren Reibungswiderstände, die letzteren umfassen die bei Verzögerung erster Art auftretenden Einflüsse der Wirbelbildung und Sekundärströmung. Sie sind beide von der Größe des Divergenzwinkels abhängig derart, daß der Rohrreibungsverlust (siehe Gleichung (21 a) bzw. (36 a)) mit wachsendem Winkel abnimmt, während der Loslösungsverlust (siehe Gleichung (19) bzw. (19')) mit wachsendem Winkel größer wird. Es ist daher der Erweiterungswinkel so zu wählen, daß die Summe der beiden Verluste ein Minimum wird. Dieser günstigste Wert ist selbst wieder vom Rauigkeitsgrade des Kanales und vom Fließzustande abhängig.

5. Prismatisch bzw. pyramidenförmig erweiterte Rohre zeigen bei ungleicher Druckverteilung über dem Querschnitt geringere Wirkungsgrade als konisch erweiterte. Dies tritt besonders bei flachen Querschnitten in die Erscheinung. Der Grund liegt in der nach den Seitenflächen im Maßstabe ihrer Entfernung von der Strommitte verschieden starken Pulsationsbewegung, die, namentlich bei nur zweiseitiger Erweiterung des (flachen) Querschnittes, zu Sekundärbewegungen und großen Loslösungsverlusten Anlaß gibt.

6. Die absolute Größe der Höchstgeschwindigkeit im Eintritte des divergierenden Kanals ist ohne Einfluß auf den Wirkungsgrad, solange der Druck im engsten Querschnitte über dem Atmosphärendrucke bleibt. Durch die andernfalls im Beginne der Erweiterung ausgeschiedenen Dämpfe, Luftmengen und Gase wird die Strömung von den Kanalwänden isoliert, so daß, unter Ausbleiben der Pulsationsbewegung, eine diskontinuierliche Verzögerung nach der ersten Art auftritt.

Setzen wir zur Bestimmung des Loslösungsverlustes $h_w^{(\lambda)}$, (analog dem Ansatz für den Verlust durch Wandreibung) diesen gleich

$$\frac{d p_{\lambda}}{d s} = h_w^{(\lambda)} = k_{\lambda} \cdot \frac{w'^2_{rm}}{2g} \cdot \frac{U}{F} \dots \dots \dots (38)$$

so erhalten wir nach Einsetzen des Wertes für ω_{rm} und Ausführung der Integration über die Weglänge ($l = s - s_0$)

$$\int_{s_0}^s \frac{d p \lambda}{d s} = h_w^{(\lambda)} = \frac{k \lambda}{4} \cdot \sin \alpha_0 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right) \cdot h_{id} \quad (39)$$

eine Beziehung, die diesen Verlust, ähnlich wie den Verlust durch den unmittelbaren Einfluß der Wandreibung (Gleichung (36a), dem ideellen Verzögerungsdruckgefälle proportional zeigt.

Für die Bestimmung des Faktors $k \lambda$ in Gleichung (39) liegen noch nicht genügend sichere Versuchsergebnisse vor. Nach den Versuchen Gibsons zeigt er eine Veränderlichkeit mit dem Erweiterungswinkel, für die jedoch eine analytische Beziehung nicht aufgestellt werden kann. Sehen wir zunächst von dieser Veränderlichkeit ab, so bestimmt sich sein Wert aus der Bedingung, daß für $\alpha_0 = 90^\circ$, also für die plötzliche Querschnittserweiterung, der hier vorgreiflich zitierte Druckhöhenverlust nach Borda-Carnot¹⁾

$$h_w^{(\lambda)} \Big|_{\alpha_0=90^\circ} = \frac{\{\omega_{\max}^{(m)} - \omega_{\min}^{(m)}\}^2}{2g} \quad \dots \quad (40)$$

auftritt.

Da nun die Beziehung besteht

$$h_{id} = \frac{\omega_{\max}^{(m)} - \omega_{\min}^{(m)}}{2g} = \left(1 + \frac{2}{\frac{F_2}{F_1} - 1} \right) \cdot \frac{\{\omega_{\max}^{(m)} - \omega_{\min}^{(m)}\}^2}{2g} \quad (41)$$

so geht Gleichung (39) über in

$$\begin{aligned} h_w^{(\lambda)} \Big|_{\alpha_0=90^\circ} &= \frac{k \lambda}{4} \cdot \sin \alpha_0 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right) \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{n-1} \right\} \cdot \frac{\{\omega_{\max}^{(m)} - \omega_{\min}^{(m)}\}^2}{2g} = \\ &= \frac{\{\omega_{\max}^{(m)} - \omega_{\min}^{(m)}\}^2}{2g} \quad \dots \quad (42) \end{aligned}$$

wobei das Querschnittsverhältnis $\frac{F_2}{F_1} = n$ gesetzt ist. Daraus

$$k \lambda = \frac{8(n-1)}{n+1} \quad \dots \quad (43)$$

Gleichung (39) lautet nun allgemein

$$h_w^{(\lambda)} = 2 \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cos^2 \frac{\alpha_0}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot h_{id} \quad \dots \quad (39a)$$

¹⁾ Siehe V. Abschnitt, S. 158.

Aus Gleichung (39a) geht hervor, daß das Verhältnis von $\frac{h_w^{(\lambda)}}{h_{ia}}$ bei konstantem Winkel mit zunehmender Kanallänge bzw. zunehmendem Querschnittsverhältnisse in geringem Maße zunimmt, ein Umstand, der im Verein mit der früher abgeleiteten Verminderung des Wandreibungsverlustes mit zunehmender Länge des Kanales die einander scheinbar widersprechenden Ergebnisse der Versuche Fliegner¹⁾, Francis²⁾, Andres³⁾ bzw. Gibsons⁴⁾ zu erklären vermag. Während sich aus den Versuchen Fliegner eine Abnahme des Wirkungsgrades der Energieumsetzung mit zunehmender Kanallänge ergab, fand Francis diesen Wert als unabhängig von der Länge der Düse, Andres eine Zunahme des Leistungsfaktors und Gibson schließlich sowohl Zu- wie Abnahme dieser Zahl bei Verlängerung der erweiterten Kanäle. Wenn wir die durch Gleichung (36a) bzw. (39a) bestimmten Druckhöhenverluste summieren, so erhalten wir den Totalverlust im divergierenden Kanal zu

$$h_w^{(T)} = h_w^{(R)} + h_w^{(\lambda)} = \left\{ \int \frac{\mu \cdot ds}{2(s-s_0)} \cdot \frac{\cot \frac{\alpha_0}{2}}{4} + \frac{n-1}{n+1} \cdot 2 \sin \alpha_0 \cdot \cos^2 \frac{\alpha_0}{2} \right\} \cdot h_{ia} \quad (44)$$

und den Wirkungsgrad der Energieumsetzung aus

$$\eta = \frac{h_{ia} - h_w^{(T)}}{h_{ia}} = 1 - \left\{ \int \frac{\mu \cdot ds}{2(s-s_0)} \cdot \frac{\cot \frac{\alpha_0}{2}}{4} + \frac{n-1}{n+1} \cdot 2 \sin \alpha_0 \cdot \cos^2 \frac{\alpha_0}{2} \right\} \quad (45)$$

Um bei gegebenem Erweiterungsverhältnisse n den Winkel α_c' für den Maximalwirkungsgrad zu bestimmen, haben wir $\frac{d\eta}{d\alpha_0} = 0$ zu setzen und erhalten aus:

$$\frac{d\eta}{d\alpha_0} = \frac{\int \mu \cdot ds}{2(s-s_0)} \cdot \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}} - \frac{4(n-1)}{n+1} [\sin^2 \alpha_0 \cdot (2 \cos \alpha_0 - 1)] = 0 \quad (46)$$

1) A. Fliegner, Zivilingenieur 1875, S. 75f.

2) Francis, siehe K. Andres, unter 3).

3) K. Andres, Mitteilungen über Forschungsarbeiten d. V.D.I., Heft 76.

4) A. H. Gibson, a. a. O.

mit $\frac{1}{2} \cdot \mu_s = 0,0055$ als Mittelwert des Turbulenzfaktors im betrachteten Kanale, für die verschiedenen Werte von n folgende Werte für α_0' :

$$\begin{array}{ll} n = 2 \dots \alpha_0' = 3^\circ 45' & n = 4 \dots \alpha_0' = 2^\circ 50' \\ n = 3 \dots \alpha_0' = 3^\circ 05' & n = 9 \dots \alpha_0' = 2^\circ 30' \end{array}$$

Das Diagramm (Fig. 24) zeigt die Abhängigkeit des günstigsten Erweiterungswinkels von dem Erweiterungsverhältnisse n .

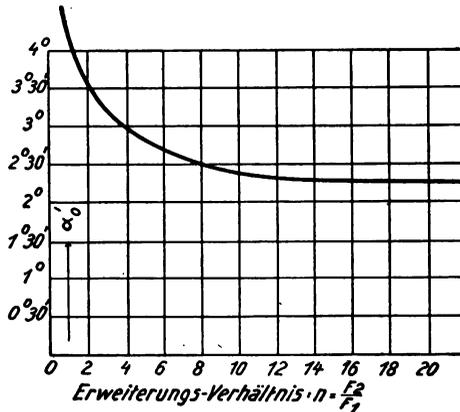


Fig. 24.

Dazu ist allerdings zu bemerken, daß der Mittelwert des Turbulenzfaktors für die verschiedenen n als konstant angenommen ist, während er tatsächlich sich mit der Größe von n etwas verändert.

Aus unseren Ableitungen bzw. aus dem Diagramme (Fig. 24) ergibt sich nun folgendes: Ist der gewählte Winkel des erweiterten Kanales für das gegebene Erweiterungsverhältnis n und einen daraus resultierenden mittleren Turbulenzfaktor der Düse kleiner als der entsprechende günstigste Erweiterungswinkel, so nimmt der Wirkungsgrad bei Verlängerung des Rohres zunächst zu, erreicht ein Maximum und nimmt bei weiterer Verlängerung wieder ab. Ist hingegen der gewählte Winkel für die gegebenen Verhältnisse größer als der entsprechende günstigste Erweiterungswinkel, so nimmt der Wirkungsgrad bei Verlängerung des Rohres konstant ab. (Siehe Fig. 24.) Die theoretisch berechneten Winkelwerte für günstigste Energieumsetzung stehen mit den Ergebnissen der Versuche in guter Übereinstimmung.

Andres nimmt an, daß die Größe des Loslösungsverlustes nur vom Erweiterungswinkel und vom ideellen Verzögerungsdruckgefälle abhängig ist. Nach unserer Definition erscheint jedoch dieser Verlust auch in Abhängigkeit von der Intensität der Pulsationsbewegung, welche ihrerseits wieder mit dem Rauigkeitsgrade wächst. Diese Abhängigkeit wird durch die Angaben der Zahlentafel 2¹⁾ im großen und ganzen bestätigt, wie der Vergleich der Werte für die Loslösungsverluste der Rohre 2, 3 und 7; 12 und 13; 14 und 15; 17 und 18 lehrt. Es werden daher für gewöhnliche gußeiserne Erweiterungsrohre und bei beträchtlicher Turbulenz der strömenden Flüssigkeit, wie z. B. im Auslaufstücke der Spiralgehäuse von Kreiselpumpen, in den Saugrohren von Turbinen usw., größere Erweiterungswinkel

$$\underline{2 a_0 \cong 10^\circ}, \dots \dots \dots (47)$$

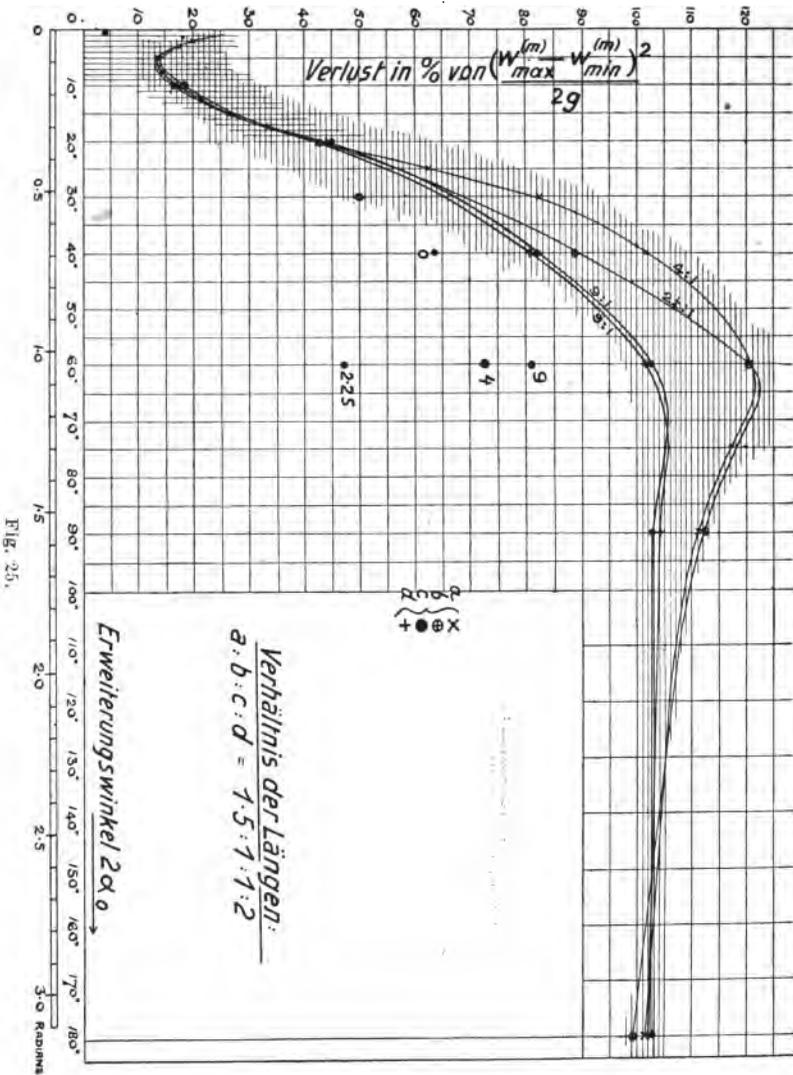
für sorgfältig bearbeitete Kanäle und bei geordneter Strömung, wie z. B. im Eintritte der Leitzellen von Turbinenpumpen, in Düsen usw., kleinere Winkel

$$\underline{2 a_0 \cong 5^\circ - 6^\circ} \dots \dots \dots (48)$$

zur Erzielung des höchsten Wirkungsgrades der Energieumsetzung zu verwenden sein. Des letzteren Werte liegen nach Andres für konische, bearbeitete Röhren zwischen 0,82 h_{id} und 0,89 h_{id} .

Aus den Ergebnissen der Versuche Gibsons ist eine eigentümliche Erscheinung zu erkennen, die in dem Aufbau der Gleichung (39a) ihre Erklärung findet. Bei zunehmender Größe des Erweiterungswinkels tritt nämlich in der Verlustkurve ein Gebiet auf, innerhalb welchem die Verluste bei konischer Erweiterung größer werden als die bei plötzlicher Querschnittsänderung. Dieses Gebiet liegt im Mittel zwischen 20° und 90°, so daß die plötzliche Querschnittserweiterung überall da vorzuziehen ist, wo der Erweiterungswinkel den Wert von etwa 17°30' übersteigt. Fig. 25. Zur Erklärung dieser Erscheinung ist zu beachten, daß einerseits bei der plötzlichen Querschnittsänderung der Reibungsweg und damit der Wandreibungsverlust verhältnismäßig sehr klein ausfällt, und daß insbesondere die Radialgeschwindigkeiten bei plötzlicher Ablenkung der Flüssigkeitselemente über den Querschnitt gleichförmiger verteilt sein werden als in der von

¹⁾ K. Andres, Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck, Z. V.D.I. 1910, S. 1638.



starken Wirbelströmungen durchsetzten, übermäßig großen, konischen Erweiterung. Im übrigen decken sich die aus Versuchen an über 100 konischen, prismatischen und pyramidenartig erweiterten Rohren gewonnenen Schlußfolgerungen Gibsons im großen und ganzen mit denen Andres, wengleich die Verlust-

104 PROFESSOR A. H. GIBSON ON THE RESISTANCE TO FLOW OF WATER

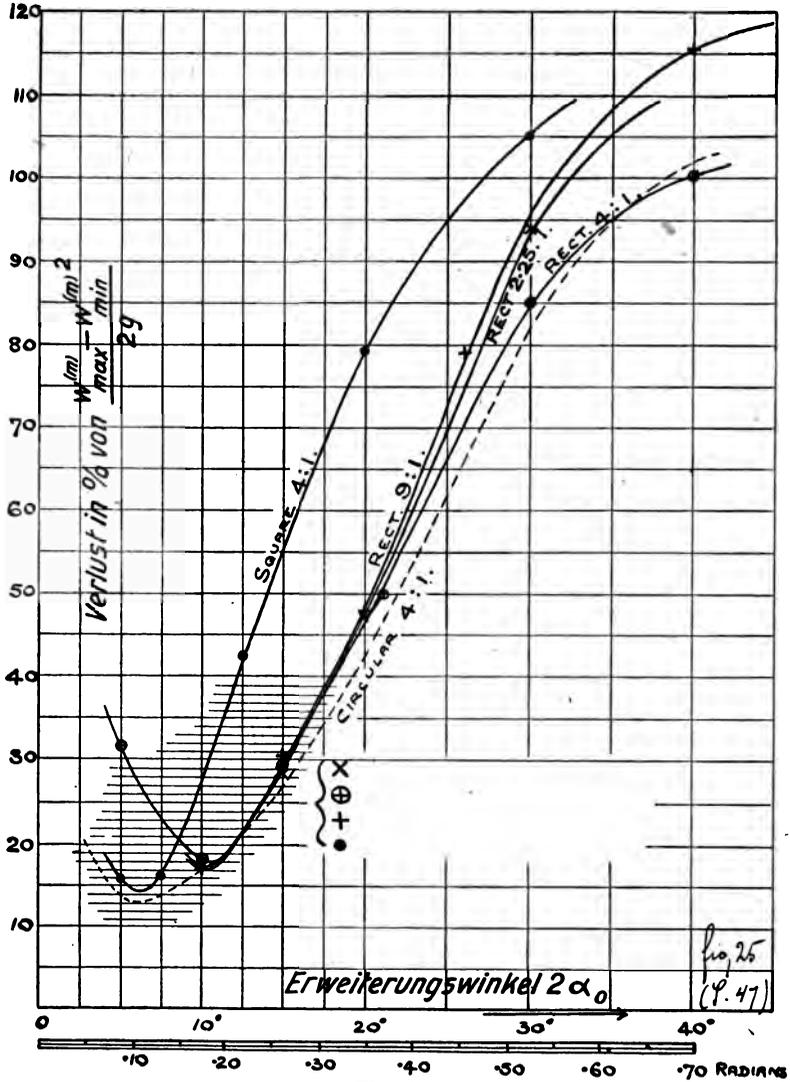


Fig. 26.

werte, die von Gibson nicht in Wandreibungs- und Loslösungsverluste zerfällt werden, bei manchen der ganz gleichartigen Versuchsrohre beider Experimentatoren nicht in Übereinstimmung

zu bringen sind. So findet Gibson bei prinzipieller Überlegenheit der konischen Erweiterung viel günstigere Werte als Andres für Rohre rechteckigen Querschnittes, deren höchster Wirkungsgrad in Prozenten der ideellen Verzögerungsdruckhöhe sich bei einem günstigsten Winkel von etwa $2\alpha_0 = 12^\circ$ zu etwa 0,85 ergibt (Fig. 26).

Aus rein theoretischen Erwägungen sind die trompetenartigen Rohrformen hervorgegangen, wie sie z. B. Prašil¹⁾ für die Saugrohre von Wasserturbinen, Kreiselpumpen, für Strahlapparate usw. abgeleitet hat, und die auch in der Praxis Eingang gefunden haben (Fig. 27). Prašil ging von dem Gedanken aus,

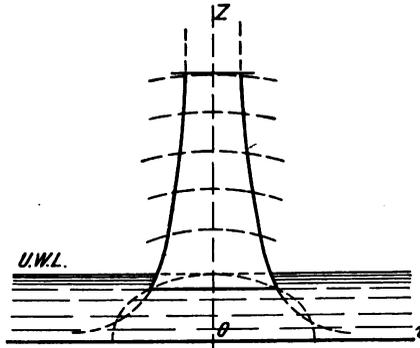


Fig. 27.

eine wirbelfreie Strömung zu formulieren, die gleichzeitig den stetigen Übergang aus der vertikalen in die horizontale Richtung auszuführen hatte. Dies gelang ihm durch den Ansatz

$$4 = A r^2 \cdot z \dots \dots \dots (49)$$

Da hierbei

$$\left. \begin{aligned} \omega_z \cdot r &= 2 A r z \\ \omega_r \cdot r &= - A r^2 \\ \omega_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

ist, verschwinden theoretisch sämtliche Wirbelkomponenten

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= - \frac{1}{2} \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{r \cdot \partial z} = 0 \\ \varepsilon_z &= + \frac{1}{2} \frac{\partial (\omega_n \cdot r)}{r \cdot \partial r} = 0 \\ \varepsilon_n &= + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (51)$$

¹⁾ F. Prašil, Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshöhlräumen, Schweizerische Bauzeitung 1903, Nr. 19f.

so daß eine Potentialströmung resultiert, deren Meridianschnitt im Unendlichen beide Achsen berührt. Damit sind wohl die der Strömung zugrunde gelegten theoretischen Bedingungen unter Voraussetzung idealer Flüssigkeit erfüllt. Beim tatsächlichen Betriebe treten jedoch durch den Einfluß der Rohrwände und die Zähigkeit, Reibungs- und Wirbelungsverluste auf, die den Strömungsverlauf beträchtlich verändern und deren Berücksichtigung bei Bestimmung des günstigsten Rohrprofils notwendig erscheint. Wir haben diese Verluste als Rohrreibungs- und Loslösungsverluste definiert und wollen nun deren Einfluß auf die Strömung im Turbinensaugrohr diskutieren.

Beim Turbinensaugrohre handelt es sich meist um ein Rohr, dessen Länge durch die allgemeinen örtlichen und Wasserverhältnisse gegeben ist, und bei dem das Erweiterungsverhältnis von der Größe des zugelassenen Austrittsverlustes bzw. von der Art der Turbinenkonstruktion abhängig ist. Da, wie wir gesehen haben, die turbulente Strömung kräftige Ringwirbelkomponenten aufweist, abgesehen von anderen die Pulsationsbewegungen begleitenden Wirbelkomponenten, ist — eo ipso — die erste der theoretischen Bedingungen der von Prašil abgeleiteten Strömung für das Turbinensaugrohr nicht stichhaltig. Wir können uns

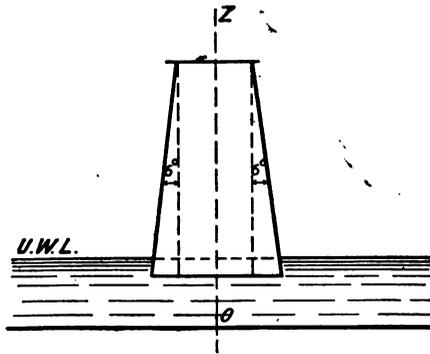


Fig. 28.

daher damit begnügen, dem Rohre jene Form zu geben, für welche die Wandreibungs- und Loslösungsverluste bei der Verzögerung der Strömung bzw. bei deren Ablenkung um 90° im Sinne der besprochenen Versuchsergebnisse und unserer Ableitungen ein Minimum werden.

Wir haben dabei zweierlei Anordnungen zu unterscheiden: 1. die, bei welcher das geradachsige Saugrohr unmittelbar unter dem Wasserspiegel der mit dem Unterwasserkanale verbundenen Saugrohrkammer ausmündet, wobei die horizontale Bodenebene der Saugrohrkammer die Ablenkungsebene bildet (Fig. 28). Da hier die zur Verhütung des Eindringens von Luft in das Saugrohr nötige Wasserspiegelhöhe über der Saugrohrmündung starke Sekundärströmungen des rundum abfließenden Wassers zur Folge hat, sind größere und modernere Anlagen meist so ausgeführt, daß 2. das Saugrohr in einen Saugrohrkrümmer aus Beton oder Eisen übergeht, der die Ablenkung in die horizontale Stromrichtung besorgt und in den Unterwassergraben mündet (Fig. 29).

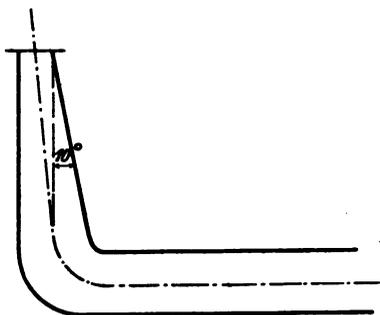


Fig. 29.

In manchen Fällen zwingen die örtlichen Verhältnisse dazu, den Krümmer auch direkt an den Turbinenausritt anzuschließen. Diese Anordnung soll gelegentlich der Behandlung der Strömung im Krümmer Besprechung finden.

Wir führen zunächst den Saugrohranschluß an den Turbinenausritt unseren Darlegungen gemäß als konisches Rohr mit dem günstigsten Er-

weiterungswinkel von $2\alpha_0 \sim 10^\circ$ aus. Dabei können drei Fälle eintreten:

1. Die gegebene Saugrohlänge reicht gerade hin, um das verlangte Erweiterungsverhältnis mit dem konstanten, günstigsten Erweiterungswinkel α_0 zu erhalten. Dabei sind die Kugel- flächen um den Mittelpunkt des Erweiterungskegels als Querschnittsflächen zu betrachten. In diesem Falle wäre demnach die günstigste Saugrohrform eine einfache konische Erweiterung von der Länge L und dem Erweiterungswinkel $2\alpha_0 = 10^\circ$. Ein Umbördeln des unteren Saugrohrandes, wie es bei geradachsigen Saugrohren der erstbesprochenen Art in der Praxis oft geschieht, hat hier keinen Zweck, da Geschwindigkeitsunterschiede zwischen der Flüssigkeit im Saugrohrende und dem seitlich abströmenden Wasser nicht bestehen und die bei der Ablenkung des dem Saugrohr entströmenden Wassers in der oberen Grenzschichte der

Strömung bzw. im darüber lagernden Wasser hervorgerufenen Sekundärströmungen bei umgebördeltem Rohrende wegen der größeren Wandreibung auch schädlichere Wirkungen hervorbringen als beim rein kegelförmigen Rohre.

2. Die gegebene Saugrohlänge reicht nicht hin, um das verlangte Erweiterungsverhältnis mit dem konstanten, günstigsten Werte von $2\alpha_0$ zu erhalten. In diesem Falle besteht die günstigste Saugrohrform aus einer konischen Erweiterung mit konstantem günstigstem Winkel α_0 , wie unter 1. und aus einer trompetenartigen Erweiterung gegen das Rohrende zu (Fig. 30).

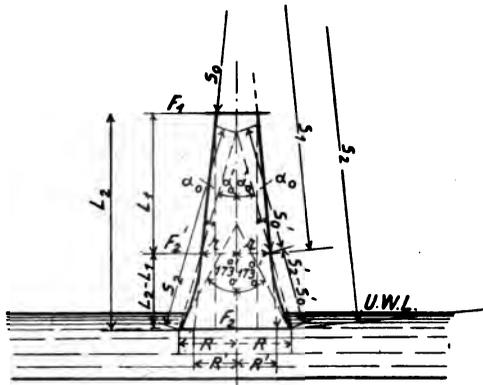


Fig. 30.

Dabei darf nach den Ergebnissen der Versuche Gibsons der Tangentenwinkel des Meridianprofils im Endquerschnitte den Wert von $17^\circ 30'$ nicht überschreiten. Die Länge der beiden Teile bestimmt sich aus der Erwägung, daß der mit dem konstanten mittleren Erweiterungswinkel α_0' auf dem Wege $L_2 - L_1$ auftretende Wandreibungs- und Loslösungsverlust gleich oder kleiner ist als die Verluste auf demselben Wege bei günstigstem Winkel α_0 plus dem Verluste bei plötzlicher Erweiterung des Endquerschnittes von F_2' auf F_2 , wobei als Querschnittsflächen wieder die Kugelflächen um die Mittelpunkte der beiden Erweiterungskegel zu nehmen sind. Diese Verluste ergeben sich aus den Gleichungen (36a) bzw. (39a) und führen mit den aus der Konstruktion gegebenen Werten von $s_0, s_2, L_2, \alpha_0, r, R, R', n = \frac{F_2}{F_1}, n' = \frac{F_2}{F_2'}$,

sowie mit

$$R = s_2' \cdot \sin \alpha_0';$$

$$s_2' - s_0' = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (R - R')^2 + 2(s_2 - s_1) \cdot (R - R') \cdot \sin \alpha_0}$$

$$r = \frac{s_0}{s_1} \cdot s_0' \cdot \sin \alpha_0';$$

$$(s_2' - s_0') = (s_2 - s_1) \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_0'};$$

$$R' = s_2 \cdot \sin \alpha_0;$$

auf je zwei Bestimmungsgleichungen für je zwei der Größen s_0' , s_1 und α_0' , aus denen alle übrigen Dimensionen eindeutig berechnet werden können. Die Durchführung einer genauen Berechnung dürfte aber in der Praxis nur dort angebracht sein, wo die Turbine mit großem Austrittsverluste arbeitet und daher ein beträchtlicher Teil des Gefälles im Saugrohr zurückgewonnen werden kann. Sonst wird man sich mit einem schätzungsweise ermittelten, stetigen Übergange vom Winkel α_0 auf den Winkel

$$\alpha_0'_{\max} = 17^\circ 30' \text{ begnügen.}$$

3. Die gegebene Länge des Saugrohres ist größer, als dem verlangten Erweiterungsverhältnisse bei konstantem günstigsten Winkel $2\alpha_0$ entspricht. In diesem (seltenen) Falle, der durch örtliche Verhältnisse gegeben sein kann, besteht die günstigste Saugrohrform aus einem konischen Teile mit dem Erweiterungswinkel $2\alpha_0$, an den sich ein gerades Rohr vom verlangten Endquerschnitte anschließt (Fig. 31).

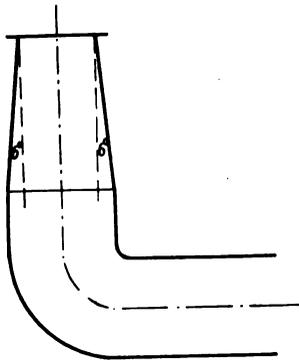


Fig. 31.

Der Übergang in den Saugkrümmer ist in allen drei Fällen möglichst sanft und stetig auszuführen.

III. Abschnitt.

Das Ausfluß- und Mündungsproblem.

Strömt eine Flüssigkeit, die wir vorläufig als ideal, d. h. reibungs- und wirbelfrei voraussetzen wollen, aus einem Gefäße durch eine scharfumgrenzte Boden- oder Seitenöffnung aus, so erleidet der ausfließende Strahl im Ausflußquerschnitte eine Einschnürung oder Kontraktion. Dabei beschreiben die einzelnen Flüssigkeitselemente Bahnen, als Stromlinien bezeichnet, deren Verlauf im Vereine mit der Geschwindigkeits- bzw. Druckverteilung längs dieser Stromlinien den Charakter der Strömung vollkommen festlegen. Helmholtz¹⁾ und Kirchhoff²⁾, die (1868 und 1869) die sog. freien Strahlen als Potentialströmungen mit Hilfe der konformen Abbildungen studierten, gelang es, analytische Ansätze zu finden, die zur Bestimmung des Verlaufes dieser Stromlinien und zur Berechnung der Strahlkontraktion bei Ausfluß durch ein inneres Ansatzrohr bzw. bei Ausfluß durch einen unendlich langen Spalt führten.

Der letztere Wert, der sich nach Kirchhoff ergibt zu

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2} \doteq 61 \quad (1)$$

wurde nun vom Verfasser zum Ausgangspunkte einer Reihe von Ausflußversuchen an rechteckigen Bodenöffnungen genommen. Es ergab sich, daß die dabei erhaltenen Versuchswerte nicht bloß quantitativ, sondern auch qualitativ von dem theoretisch berechneten bedeutend abwichen. So fand sich z. B. der Ausflußkoeffizient μ einer scharfkantigen, quadratischen Bodenöffnung von 20 mm · 20 mm Querschnitt bei einer statischen Druckhöhe von

¹⁾ H. von Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Band I, S. 146 n. f.

²⁾ G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 22. Vorl.

300 mm und einem Verhältnisse des Ausflußquerschnittes F_0 zum Gefäßquerschnitte F , (Fig. 32), $\frac{F_0}{F} = 0,01$, zu $\mu = 0,625$.

In diesem Ausflußkoeffizienten μ ist sowohl der bei der tatsächlichen Strömung infolge Reibung bzw. Wirbelung auf-

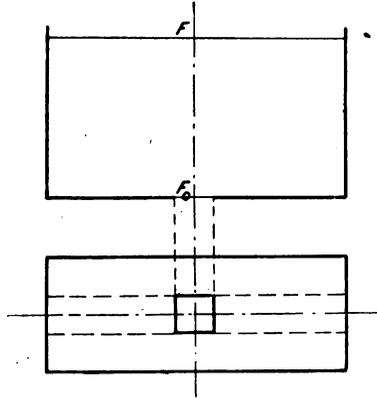


Fig. 32.

tretende Geschwindigkeitsverlust $(1 - \varphi) \cdot w_0$, als auch der Kontraktionskoeffizient α derart enthalten, daß

$$\mu = \alpha \cdot \varphi \dots \dots \dots (2)$$

woraus sich mit $\varphi = 0,96$, α ergibt zu: $\alpha = 0,65$.

Wird nun die Ausflußöffnung bei gleichbleibender Breite, bezw. Druckhöhe, und unter Wahrung eines Querschnittsverhältnisses $\frac{F_0}{F} > 0,1$ verlängert, so tritt eine beträchtliche Zunahme des Ausflußkoeffizienten und damit der Kontraktionszahl α ein (Fig. 33, Kurve a). Dieses Ergebnis steht aber in direktem Gegensatz zu dem von Kirchhoff gefundenen Werte, der für einen unendlich langen Spalt, bzw. für einen Spalt mit Kontraktion an bloß zwei Ausflußkanten abgeleitet ist. Da sich die bei unseren Versuchen auftretende doppelte Kontraktion des Strahlquerschnittes, — an vier Ausflußkanten —, bzw. ein etwaiger, den Potentialcharakter der Strömung störender Einfluß von Reibung und Wirbelung in einer Verminderung des Ausflußkoeffizienten gegenüber dem theoretischen hätte geltend machen müssen, ist das gegenteilige Ergebnis ein Beweis dafür, daß der von Kirchhoff angenom-

mene Strömungsverlauf, bzw. die von ihm der Strömung zugrunde gelegten Ansätze die tatsächlich auftretenden Erscheinungen nicht zu erklären vermögen.

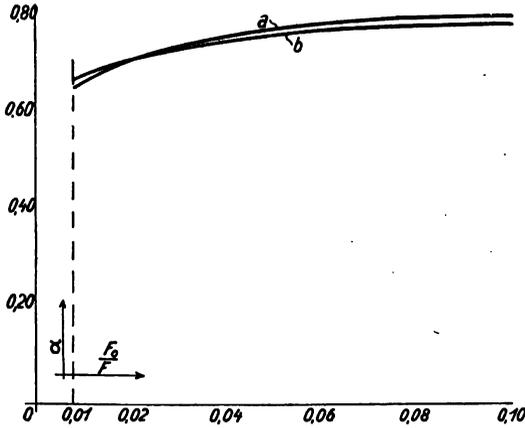


Fig. 33.

Um nun eine der praktischen Erfahrung besser entsprechende Grundlage für den Stromverlauf zu erhalten, stellte der Verfasser folgende Überlegungen an:

Angenommen, die Ausflußöffnung (Fig. 34) wäre geschlossen, dann lastet auf jedem Flüssigkeitselemente längs der Bodenfläche *AA* der statische Druck *h* in Metern Flüssigkeitssäule. Wird nun die Öffnung freigegeben, so werden zunächst sämtliche Flüssigkeitsteilchen im Ausflußquerschnitte unter der Wirkung der Druckhöhe *h* in gleicher Weise beschleunigt, bis sich schließlich — *h* als konstant vorausgesetzt — ein Beharrungszustand der Strömung unter Entwicklung einer Ausflußgeschwindigkeit

$$w_0 = \sqrt{2gh} = \text{konst.} \quad \dots \quad (3)$$

einstellt. Die unmittelbar über der Ausflußöffnung und längs deren Kanten abfließenden Flüssigkeitselemente müssen im Beharrungszustande aus der im Innern des Gefäßes nachströmenden Flüssigkeit immerwährend und in gleicher Weise ersetzt werden. Die ganze Strömung verläuft demnach gleichsam in zwei Phasen, von denen die eine die Flüssigkeitsbewegung im Innern, die andere jene außerhalb des Ausflußgefäßes umfaßt. Wir wollen zunächst

die letztere, insbesondere die Verhältnisse im Ausflußquerschnitte selbst in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

Im Ausflußquerschnitte streben die Flüssigkeitselemente in allen Punkten desselben mit von außen nach innen zunehmender

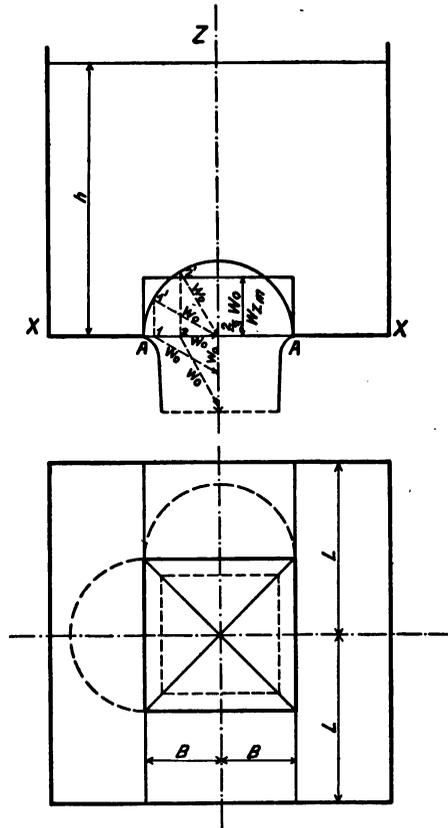


Fig. 34.

Neigung gegen die Querschnittsebene, sämtlich der Strahlachse zu. Wenn wir ihnen über die ganze Querschnittsbreite $2B$ die gleiche Absolutgeschwindigkeit w_0 zuteilen, so ergibt sich das Geschwindigkeitsdiagramm (Fig. 34). Dabei ist zweckmäßig der Maßstab für die Geschwindigkeit so zu wählen, daß w_0 gleich B wird. Für den Spalt von unendlicher Länge bzw. mit Kontraktion an bloß zwei Ausflußkanten geht dieser Geschwindigkeits-

Halbkreis in einen Geschwindigkeits-Halbkreiszyylinder über. Für die Bestimmung der endgültigen Ausflußmenge in der Richtung der Z-Achse kommen bloß die Vertikalkomponenten der Geschwindigkeiten im Ausflußquerschnitte in Betracht. Wir erhalten die tatsächliche Ausflußmenge, wenn wir die Fläche des Ausflußquerschnittes mit der mittleren vertikalen Geschwindigkeitskomponente der durch denselben hindurchströmenden Flüssigkeitselemente multiplizieren. Die letztere bestimmt sich aus

$$\omega_{zm} = \int_{x=0}^{x=\omega_0} \frac{y \, dx}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{2} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot \omega_0 \dots (4)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} y &= \omega_z = \omega_0 \cdot \sin \varphi \\ x &= \omega_0 - \omega_z = \omega_0 (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots (4a)$$

Aus Gleichung (4) bestimmt sich die Kontraktionszahl α des ausfließenden Strahles zu

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 0,7854 \dots (5)^1$$

Ist der Querschnitt allseitig umschlossen, fließt also der Strahl mit Kontraktion an vier Kanten aus und ist insbesondere der Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge $2B$, so gilt folgendes: Die wie früher konstruierten Geschwindigkeitshalbzylinder für je ein Kantenpaar durchdringen sich, und das dabei abgegrenzte Volumen ergibt das Raumintegral sämtlicher über den Ausflußquerschnitt verteilter, vertikaler bzw. horizontaler Geschwindigkeitskomponenten. Auch hier wird die Kontraktionszahl am einfachsten durch Verwandlung des konstruierten Geschwindigkeitsvolumens in ein gleichgroßes Parallelepiped mit der Basis $4\omega_0^2$ ermittelt. Das Geschwindigkeitsvolumen ergibt sich zu

$$V = \frac{8}{3} \omega_0^3 \dots (6)$$

woraus sich die Höhe des gleich großen Parallelepipeds mit der

1) Wir wären natürlich zu diesem Werte auch gekommen, wenn wir den Geschwindigkeitshalbzylinder in ein volumengleiches Parallelepiped mit der Ausflußfläche als Grundfläche verwandelt und das Verhältnis von dessen Höhe zum Zylinderhalbmesser gleich α gesetzt hätten.

Basis $4\omega_0^2$ berechnet zu

$$\omega_{zm} = \frac{V}{4\omega_0^2} = \frac{2}{3}\omega_0 \quad \dots \quad (7)$$

und die Kontraktionszahl zu

$$\alpha = \frac{2}{3} = 0,666 \quad \dots \quad (8)$$

Weicht die Querschnittsform von der quadratischen ab, so erstreckt sich der Einfluß der schmalen Kanten, wegen der im Innern des Strahles bei der Ausströmung erzeugten Ablenkungsdrücke, beidseitig nur auf eine Strecke, welche gleich ist der halben Querschnittsbreite, also gleich B (Fig. 34). Die über den beiden Schmalseiten des Ausflußquerschnittes aufgerichteten Geschwindigkeitsvolumina ergeben sich zusammen wie beim Quadrate, während als weiteres Volumen ein Halbzylinder von der Länge $2L'$:

$$2L' = 2L - 2B$$

hinzukommt. Es ist demnach das Gesamtvolumen

$$V = \frac{8}{3}\omega_0^3 + \frac{\pi}{2}\omega_0^2(2L - 2B) \quad \dots \quad (9)$$

und daraus

$$\omega_{zm} = \frac{V}{4\omega_0 L} = \frac{2}{3}\frac{\omega_0^2}{L} + \frac{\pi}{4}\omega_0 - \frac{\pi}{4}\frac{B}{L} \quad \dots \quad (10)$$

Für $\frac{\omega_0}{L}$ können wir auch wegen der geometrischen Gleichheit der Maßstäbe setzen: $\frac{B}{L}$ und erhalten

$$\omega_{zm} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi - 8}{12} \cdot \frac{B}{L}\right)\omega_0 = \left(0,7854 - 0,1187 \frac{B}{L}\right)\omega_0 \quad (10a)$$

Daraus die Kontraktionszahl

$$\alpha = 0,7854 - 0,1187 \frac{B}{L} \quad \dots \quad (11)$$

allgemein gültig für den rechteckigen Querschnitt. (Fig. 33, Kurve b).

Sie ist demnach abhängig vom Verhältnisse $\frac{B}{L}$, und wird ein Minimum für das Quadrat, — $B = L$ —, bzw. ein Maximum für

$L = \infty^1$): $\alpha_{\min} = 0,666$, $\alpha_{\max} = 0,7854$ in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung.²⁾

Der Strömungsverlauf folgt im übrigen einer Stromfunktion ψ , die sich aus den folgenden Bedingungen ergibt:

1. Die Geschwindigkeitsrichtungen im Ausflußquerschnitte gehen sämtlich stetig in die Richtung der Z-Achse über.
2. Die Geschwindigkeit sei unterhalb des Ausflußquerschnittes in allen Punkten eines horizontalen Stromquerschnittes konstant und gleich

$$w = \sqrt{2gz}, \quad \dots \dots \dots (3a)$$

wobei die Spiegelebene im Ausflußgefäße als Nullebene anzusehen ist.

Für die analytische Berechnung der ψ -Linien, (Stromlinien), gilt dann die Beziehung

$$2x \cdot w_{zm} = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (12)$$

w_{zm} ist nach Gleichung (4), bzw. (3a), eine Funktion von φ und z :

$$w_{zm} = f(\varphi) \cdot k \cdot \sqrt{z} \quad \dots \dots \dots (13)$$

Mit

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{dz}{dx} \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{dz}{dx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

geht Gleichung (12) über in

$$x \cdot f \left(\operatorname{arctg} \frac{dz}{dx} \right) \cdot \sqrt{z} = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (12a)$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich für ψ eine sehr komplizierte Funktion von x und z

$$\psi = \psi(x, z) \quad \dots \dots \dots (12b)$$

welche der Kontinuitätsbedingung genügen muß

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots (15)$$

¹⁾ Der Ausfluß an nur zwei Ausflußkanten (Fig. 32, punktiert) ist dem durch einen unendlich langen Spalt gleichwertig.

²⁾ Siehe auch Hütte, I. Band, 22. Aufl., S. 275.

wobei

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w_z &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

und

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = w^2 = kz \dots \dots \dots (17)$$

Die durch vorstehende Gleichungen festgelegten Stromlinien ψ werden von Äquipotentialkurven Φ ,

$$\Phi = \Phi(x, z) \dots \dots \dots (18)$$

rechtwinkelig durchschnitten. Es ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots \dots \dots (19)$$

Gleichungen (12b) und -(18) bestimmen demnach ein ortho-

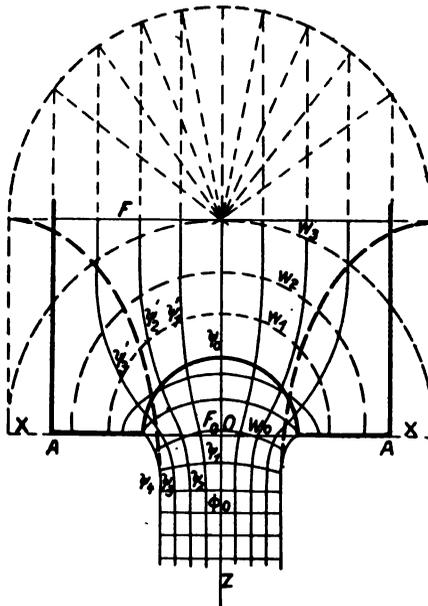


Fig. 35.

gonales Netz der Strömung, wie es etwa in Fig. 35 eingezeichnet ist.

Um über den Strömungsverlauf im Innern des Ausflußgefäßes Aufschluß zu erhalten, denken wir uns jetzt umgekehrt, ein Flüssigkeitsstrahl münde mit der Mündungsgeschwindigkeit $w_0 = \sqrt{2gh}$ in ein Gefäß vom Querschnitte F , auf dessen Mündungsquerschnitt F_0 der statische Druck von h Metern Wassersäule lastet. Wir denken uns die Strahlelemente nach den eben abgeleiteten Strömungsgesetzen, aber in umgekehrter Richtung auf die Mündungsöffnung zuströmen. Unter der Wirkung der Druckhöhe h werden dieselben im Innern des Gefäßes stetig auf eine Geschwindigkeit w'' verzögert, deren Wert der Größe des Gefäßquerschnittes F entspricht. Wenn wir F so groß annehmen, daß wir die Geschwindigkeit w'' vorläufig vernachlässigen können, so erhalten wir für das Einströmen des Strahles in das Mündungsgefäß folgende Vorstellung:

Gilt für die Geschwindigkeit wie früher die Beziehung $w = \sqrt{2gz}$ (Fig. 34), ist w demnach in allen Punkten eines horizontalen Stromquerschnittes konstant, so wird sich bei geeigneter Formgebung des Gefäßbodens eine konoidartige Strombegrenzung nach Gleichung (12b) einstellen, und die Strömung selbst nach einer der früher abgeleiteten Stromfunktion analogen Stromfunktion verlaufen. Hat aber, wie in unserem Falle, das Mündungsgefäß eine horizontale Bodenfläche AA , so würde sich zwischen der Stromgrenzfläche \mathcal{A}' und AA eine Flüssigkeitsschicht befinden, die unter der Wirkung der statischen Druckhöhe h steht und die, da in \mathcal{A}' infolge der dort herrschenden Strömungsgeschwindigkeit ein Druck kleiner als h auftreten muß, nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn sie dieselbe Druck- bzw. Geschwindigkeitsverteilung annimmt, wie sie längs der benachbarten Stromgrenzfläche \mathcal{A}' besteht. Da dies jedoch einen Zuwachs an strömendem Volumen gleichkommen würde, der mit der Forderung der Kontinuität unvereinbar ist, paßt sich die Strömung den Verhältnissen derart an, daß \mathcal{A}' in die Bodenfläche AA übergeht bzw. letztere selbst die äußere Stromgrenzfläche bildet und die übrigen Stromlinien sich ihr stetig anschmiegen.¹⁾

¹⁾ Hier sei erwähnt, daß schon Newton (Philosophiae naturalis, 1687) von dem Gedanken ausging, es müsse sich im Ausflußgefäße ein dem Fallgesetze entsprechender, konoidartiger, von der Oberfläche ausgehender, strömender Flüssigkeitskörper ausbilden, um welchen herum

Auch hier lassen sich analog Gleichung (18) Äquipotentialflächen

$$\Phi' = \Phi'(x, z) \dots \dots \dots (18a)$$

finden, deren Schnitte mit den Stromlinienflächen \mathcal{L}' ein orthogonales Kurvennetz zur Beschreibung des Stromverlaufes ergeben.

Die einander zugeordneten Punkte gleicher Geschwindigkeit liegen aber nun nicht mehr in horizontalen Ebenen sondern auf gekrümmten Flächen, die wir konstruieren können, wenn wir überlegen, daß jeder Punkt der horizontalen Stromlinie \mathcal{L}'_0 einem mit z veränderlichen Stromquerschnitte angehört, derart, daß nach Gleichung (12) die Punktgeschwindigkeit der Ausfluß- bzw. Mündungsgeschwindigkeit ω_0 im Verhältnisse der halben Querschnittsbreite B zum Abstände ξ des betrachteten Punktes von der Strahlachse proportional ist:

$$\omega' = \frac{B}{\xi} \omega_0 \dots \dots \dots (20)$$

Die dem Gefäßquerschnitte F entsprechende Geschwindigkeit ω'' ergibt sich zu

$$\omega'' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{F_0}{F} \omega_0 \dots \dots \dots (20a)$$

so daß wegen

$$\frac{F_0}{F} = \frac{B}{B'},$$

ω'' in der Bodenebene erst in der Entfernung, $\xi = \frac{4}{\pi} B'$ von der Achse — demnach außerhalb des Gefäßes — erreicht werden könnte. Um in der Z -Achse den Punkt zu finden, in dem bei der Verzögerung des einmündenden Strahles sich die Geschwindigkeit ω' einstellt, setzen wir den aus Gleichung (20) bestimmten Wert für ω' gleich

$$\omega' = \frac{B}{\xi} \omega_0 = \sqrt{2gz'}, \dots \dots \dots (21b)$$

woraus sich die Lage des gesuchten Punktes in der Z -Achse berechnet. Die Flächen gleicher Geschwindigkeit bzw. gleichen

die Flüssigkeit im Ausflußgefäße in Ruhe verharre. Unter Berücksichtigung des Gesetzes vom hydraulischen Drucke und der Kontinuität der Strömung führt die Newtonsche Vorstellung auf die Anschauung des Verfassers.

Druckes lassen sich nun leicht einzeichnen. Sie erscheinen als Zylinderflächen, deren Leitlinien Kurven zweiten Grades sind, und die in größerer Höhe im Ausflußgefäße (Mündungsgefäße) in horizontale Niveauebenen übergehen (Fig. 35).

Ist der Ausfluß- bzw. Mündungsquerschnitt eine Kreisfläche vom Halbmesser r_0 , so gilt für die Ausflußgeschwindigkeit ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{2gh} = \text{konst.} \quad \dots (22)$$

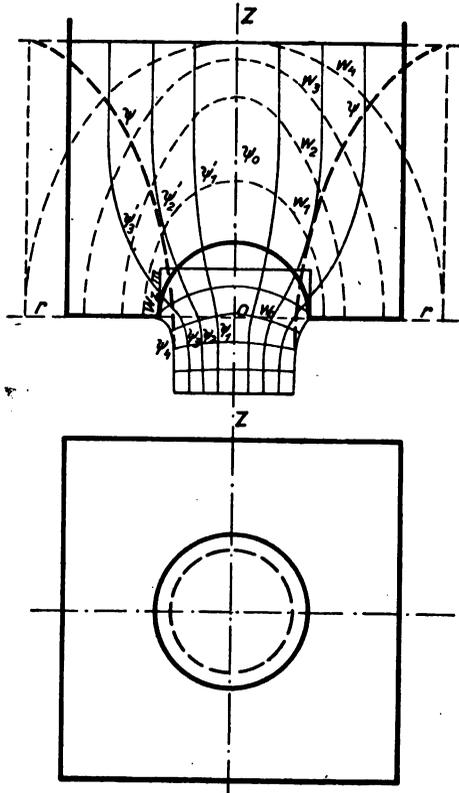


Fig. 36.

Das über dem Ausflußquerschnitte errichtete Geschwindigkeitsvolumen ist demnach eine Halbkugel vom Halbmesser ω_0 bzw. von der Größe $V = \frac{2}{3} \omega_0^3$, mit der ein Zylinder über der

Basis $\pi\omega_0^2$ von der Höhe $H = \frac{2}{3}\omega_0$ volumengleich ist, so daß sich für die Kontraktionszahl α nach früherem ergibt

$$\alpha = \frac{2}{3} = 0,666 \dots \dots \dots (23)$$

(Fig. 36).

Da wir es hier mit einer achsensymmetrischen Strömung zu tun haben, können wir in jedem Punkte des Stromquerschnittes $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_r^2$ setzen und erhalten damit unter Vernachlässigung einer etwaigen Rotation der Flüssigkeit, $\omega_n = 0$, allgemein

$$\omega^2 = \omega_r^2 + \omega_z^2 = \text{konst.} \dots \dots \dots (22a)$$

Die Stromfunktion φ bestimmt sich analog wie früher aus

$$r^2 \omega_{z m} = \text{konst.} \dots \dots \dots (24)$$

$$\omega_{z m} = f(\varphi) \cdot \sqrt{2gz} \dots \dots \dots (25)$$

$$\varphi = \arctg \frac{dz}{dr} \dots \dots \dots (26)$$

$$r^2 f \left(\arctg \frac{dz}{dr} \right) \cdot \sqrt{z} = \text{konst.} \dots \dots \dots (24a)$$

Aus Gleichung (24a) ergibt sich wieder eine sehr verwickelte Funktion

$$\varphi = \varphi(r, z) \dots \dots \dots (24b)$$

die der Kontinuitätsbedingung genügen muß

$$\frac{\partial(\omega_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial(\omega_z \cdot r)}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (27)$$

wobei

$$\omega_r \cdot r = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \omega_z \cdot r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \dots \dots \dots (28)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{r \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{r \cdot \partial r} \right)^2 = \omega^2 = 2gz \dots \dots \dots (29)$$

Die Äquipotentialflächen der Strömung bestimmen sich analog Gleichung (18) aus der Beziehung

$$\Phi = \Phi(r, z) \dots \dots \dots (30)$$

welche den Ansätzen

$$\left. \begin{aligned} d\Phi &= \omega_x dz + \omega_r \cdot dr \\ \Phi &= \int (\omega_x dz + \omega_r \cdot dr) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

genügen muß. Wollen wir den Stromverlauf im Innern des Ausflußgefäßes ermitteln, so gilt hier dieselbe Betrachtungsweise wie im vorhergehenden Falle. Die Geschwindigkeitsverteilung längs der horizontalen Bodenfläche AA bestimmt sich nach Gleichung (24) aus

$$\omega' = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cdot \omega_0 \dots \dots \dots (32)$$

Sie ist demnach der Ausflußgeschwindigkeit proportional und zwar im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Achsentfernung des betrachteten Punktes zum Halbmesser der Ausflußöffnung. Das Aufsuchen der Punkte und das Aufzeichnen der Kurven bzw. Flächen gleicher Geschwindigkeit und gleichen Druckes geschieht ganz analog wie früher. Sie liegen auf Rotationsflächen, die im Gefäße in größerer Höhe in ebene Niveauflächen übergehen (Fig. 36).

Für andere Formen der Ausflußöffnung lassen sich die Kontraktionszahlen nach unserer Methode ohne große Schwierigkeiten berechnen, bzw. übersichtliche Darstellungen des Strömungsverlaufes gewinnen.

Um z. B. die Kontraktionszahl bei Ausfluß durch ein ins Innere des Ausflußgefäßes vorspringendes Ansatzrohr zu ermitteln (Fig. 37), brauchen wir uns bloß zu überlegen, daß die seitlich zuströmenden Flüssigkeitselemente eine Krümmung von 180° durchlaufen. Es wird sich also rund um den eingeschnürten Strahl gewissermaßen ein ringförmiger (Flüssigkeits-) Träger von bogenförmigem Profile ausbilden, der vermöge der

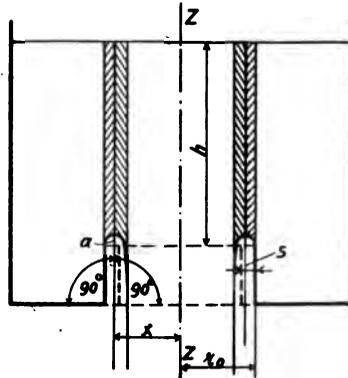


Fig. 37.

in ihm erzeugten Fliehkraftdrücke der strömenden Flüssigkeitsteilchen das auf ihm lastende Gewicht der Flüssigkeitssäule bis zur Oberfläche des Ausflußgefäßes zu tragen hat. Bei gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung in der abgelenkten Flüssigkeit ist auch die Belastung über den ganzen Träger gleichmäßig verteilt. Es muß also bei der Umlenkung von 0° bis 90° das gleiche Flüssigkeitsgewicht getragen werden, wie bei der weiteren Umlenkung

von 90° bis 180° . Aus dieser Bedingung läßt sich die Lage des Scheitels der bogenförmigen Krümmung und damit die Kontraktionszahl ohne weiteres bestimmen. Es besteht die Beziehung

$$\pi (r_0^2 - x \cdot r_0^2) \cdot h \cdot \gamma = \pi (x \cdot r_0^2 - a \cdot r_0^2) h \cdot \gamma \quad \dots \quad (33)$$

und daraus

$$a = 2x - 1 \quad \dots \quad (34)$$

Ferner ist nach früherem die Kontraktionszahl a auch gleich

$$a = \frac{2}{3}x \quad \dots \quad (35)$$

und daraus

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} = 0,75 \\ a &= \frac{1}{2} = 0,50 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (36)$$

in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Versuche.¹⁾

Aus obiger Ableitung ist ersichtlich, daß die Kontraktionszahl $a = 0,50$ nur bei messerscharfer Ausflußkante des Ansatzrohres auftreten kann, und daß sie sich bei breiter Kante wesentlich vergrößert. Theoretisch gilt für breite Kanten:

$$a' = \frac{1}{2} \frac{\pi \cdot (r_0 + s)^2}{\pi r_0^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 2 \frac{s}{r_0} + \frac{s^2}{r_0^2} \right) \quad \dots \quad (37)$$

wobei s die Breite der Kante bezeichnet. Doch wird sich bei größerer Kantenbreite infolge der Ejektorwirkung der ausströmenden Flüssigkeit der Raum a über der Ausflußkante alsbald mit Flüssigkeit füllen und die Strömung wie beim Ausfluß durch eine ebene, scharfumgrenzte Bodenöffnung vor sich gehen: ($a'_{\max} = \frac{2}{3}$). Ein ähnlicher Einfluß macht sich geltend, wenn die Erzeugende des Ansatzrohrmantels gegen die Strahlachse unter einem spitzen Winkel geneigt ist.²⁾

Wenn wir das Wesen dieser Strömungen näher betrachten, so sehen wir, daß sie unter dem Einflusse zweier Potentialkräfte stehen: Erstens unter der Einwirkung der Schwerkraft bzw. des hydraulischen Druckes, und zweitens unter der Wirkung der Fliehkräfte, die durch die Ablenkung aller mit einer horizontalen

¹⁾ Siehe Grashof, Theoretische Maschinenlehre, I. Band, S. 435.

²⁾ Siehe Hütte, I. Band, 22. Aufl., S. 276.

Geschwindigkeitskomponente zuströmenden Flüssigkeitselemente in die Richtung der Z -Achse hervorgerufen werden. Die erstere allein äußert sich in der Beschleunigung der ausströmenden Flüssigkeitsmasse, während die Fliehkräfte die Einschnürung des Strahles bewirken, wobei die Flüssigkeitselemente — mit Ausnahme der in unmittelbarer Nähe der Strahlachse gelegenen — Rotationen um Achsen ausführen, die normal zur Richtung der Strahlachse und parallel zur Ebene des Ausflußquerschnittes liegen. Dieser Drehbewegung bzw. den hierbei erzeugten Fliehkraftdrücken entspricht natürlich eine Zunahme des Druckes im Strahle, die sich angenähert wie folgt berechnet:

Denken wir uns die gesamte pro Sekunde ausströmende Flüssigkeitsmasse M in einem Punkte vereinigt und mit der mittleren Horizontalgeschwindigkeit sämtlicher Flüssigkeitselemente des Ausflußquerschnittes zuströmen, so ergibt sich der Ablenkungsdruck in radialer bzw. axialer Richtung zu

$$P_r = P_z = M (\omega_{rm1} - \omega_{rm2}) \quad (38)$$

Bei einer Ablenkung um 90° wird $\omega_{rm2} = 0$.

ω_{rm1} findet sich als Halbmesser der Kreisfläche, welche bei Verwandlung der Geschwindigkeitshalbkugel in einen Kreiszylinder von der Höhe $h'' = \omega_0$ dessen Grundfläche bildet (Fig. 38).

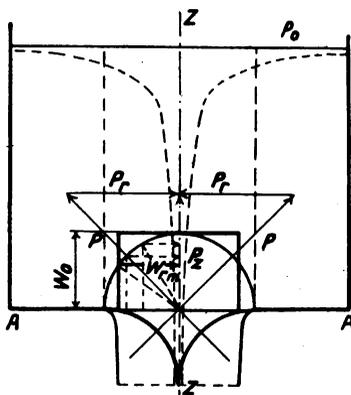


Fig. 38.

$$\omega_{rm1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_0 = 0,8165 \omega_0 \quad \dots \quad (39)$$

Mit

$$M = \frac{\gamma}{g} \cdot a \cdot \pi \cdot r_0^2 \omega_0 \quad \dots \quad (40)$$

und

$$\omega_0 = \sqrt{2gh},$$

geht Gleichung (38) über in

$$P_r = P_z = 1,633 \cdot a \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot h \cdot \gamma \quad \dots \quad (41)$$

Es ist nach unseren Ableitungen klar, daß diese zusätzlichen, in der strömenden Flüssigkeit auftretenden Drücke die potentielle Energie im Strahlquerschnitte nicht zu erhöhen vermögen, da sonst wegen der von uns aus den Versuchsergebnissen nachgewiesenen bzw. abgeleiteten Gleichheit der Geschwindigkeiten im Ausflußquerschnitte den zusätzlichen Drücken im weiteren Verlaufe der Strömung eine beträchtliche Erhöhung der mittleren Geschwindigkeit entsprechen würde, die mit der Bedingung der Kontinuität nicht in Einklang zu bringen wäre. Dieser scheinbare Energiezuwachs ist offenbar an die Lage des Flüssigkeitselementes im Kraftfelde der ihn erzeugenden Fliehkräfte gebunden und verschwindet wieder, sobald das Flüssigkeitselement dieses Kraftfeld verläßt. Das Arbeitsvermögen jedes Elementes relativ zu seiner Umgebung bleibt dabei ungeändert. Wir werden auf diese Verhältnisse im weiteren Verlaufe unserer Ausführungen noch zurückkommen.

Einige eigentümliche, beim Studium des Ausfluß- bzw. Mündungsproblem es in die Augen fallende Erscheinungen können wir nun nach unserer Auffassung zwanglos erklären. Hier seien nur das Auftreten der Strudelbildung in Ausflußgefäßen, Wasserturbinenkammern usw., und die Erscheinung der sog. Strahlreaktion etwas eingehender behandelt.

Wenn wir den unter großer Druckhöhe austretenden Strahl betrachten, so sehen wir, daß sich die Kontraktion nach den von uns angegebenen Gesetzen vollzieht bis zu einem Querschnitte größter Einschnürung, der um die Länge des Halbmessers der Ausflußkreisfläche von letzterer entfernt ist. Von diesem engsten Querschnitte an breitet sich der Strahl unter dem Einflusse der inneren und äußeren Reibungswiderstände in einem schlanken Kegel aus. Sinkt nun die Spiegelhöhe im Ausflußgefäße und damit der Wert der Ausflußgeschwindigkeit, so tritt zunächst eine leichte Vergrößerung des engsten Strahlquerschnittes, also eine geringe Erhöhung der Kontraktionszahl α ein. Erreicht die Verminderung der Spiegelhöhe im Gefäße ein gewisses Maß, das wir die kritische Spiegelhöhe h_k nennen wollen, so bildet sich im Ausflußgefäße in der Umgebung der Strahlachse ein Wirbeltrichter (Strudel), während gleichzeitig der ausströmende Strahl mehr oder weniger zersplittert erscheint. Es ist also gerade so, als ob die Zentrifugaldrücke der seitlich zuströmenden und in die Richtung der Z-Achse abgelenkten Flüssigkeitselemente nur

oberhalb einer gewissen Grenzgeschwindigkeit bzw. Spiegelhöhe imstande wären, dem gesamten Flüssigkeitsgewichte über der Ausflußöffnung, — vom Wasserspiegel im Gefäße bis zum Querschnitte größter Einschnürung gerechnet, — das Gleichgewicht zu halten. Wir haben nach Gleichung (41) diese Zentrifugaldrücke gefunden zu

$$P_r = P_z = 1,633 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot h \cdot \gamma.$$

Das Gewicht der über der Ausflußöffnung bis zum engsten Querschnitte reichenden Flüssigkeitssäule ist, in großer Annäherung in kg.

$$P_1 = \pi \cdot r_0^2 \cdot h \gamma + \frac{2}{3} \pi \cdot r_0^3 \cdot \gamma \quad (42)$$

Setzen wir $P_z = P_1$, so erhalten wir

$$1,633 \alpha \pi \cdot r_0^2 \cdot h \gamma = \pi \cdot r_0^2 \left(h + \frac{2}{3} r_0 \right) \gamma \quad (43)$$

Ordnen wir weiters der kritischen Spiegelhöhe den nach Gleichung (23) gefundenen Wert für $\alpha = \frac{2}{3}$ zu, so ergibt sich

$$1,088 h_k = h_k + \frac{2}{3} r_0 \quad (44)$$

und daraus

$$h_k = 7 \cdot 55 r_0 \quad (45)$$

als jene kritische Wasserspiegelhöhe, bei der die Strudelbildung beginnt, in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Erfahrung.¹⁾

Zur Entstehung des Wirbeltrichters ist folgendes zu bemerken: Die im Kraftfelde der Fliehkräfte ausströmenden Flüssigkeitselemente können nur dann im stabilen Gleichgewichte sein, wenn jedes derselben die gleich große Fliehkraft bzw. den gleich großen Bahndruck entwickelt, also mit der gleichmäßig über dem Stromquerschnitt verteilten elementaren Masse $m = 1, \frac{\omega^2}{\rho} = \text{konstant}$ ist im ganzen Bereiche des Kraftfeldes. Diese Bedingung ist aber in unmittelbarer Umgebung der Strahlachse wegen $\rho = \infty$ nicht erfüllbar. Es wird sich also um die Achse ein Kern ruhender, bzw. wirbelnder Flüssigkeitselemente abgrenzen, an dessen Mantelfläche die Bedingung $\frac{\omega^2}{\rho} = \text{konst.}$ bestehen kann. Durch das

¹⁾ Siehe Hütte, 21. Aufl., I. Band, S. 270.

Auftreten dieses Kernes, der an der Strömung selbst nicht teilnimmt, wird aber der nach früherem berechnete Kontraktionskoeffizient α , bzw. die Ausflußzahl μ proportional der Größe dieses Kernes vermindert. Da sich α nach der Gleichgewichtsbedingung (43) bei einer Druckhöhe $h > h_k$ ebenfalls verringert, ist auch anzunehmen, daß die Größe des wirbelnden Kernes mit zunehmendem h wächst, bzw. für $h = h_k$ ein Minimum ist. Die aus Gleichung (43) berechnete Abhängigkeit der Kontraktionszahl α von h zeigt Fig. 39. Sie steht in guter Übereinstimmung

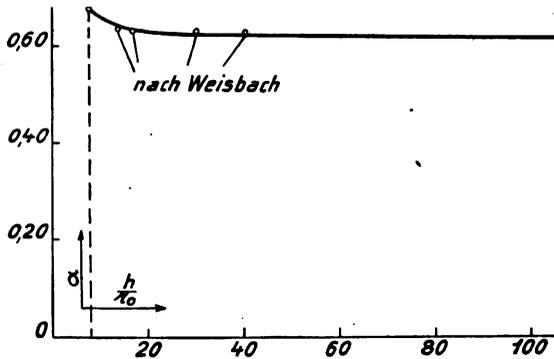


Fig. 39.

mit den Ergebnissen der Erfahrung, wenn wir, wie früher, der kritischen Spiegelhöhe h_k den Wert $\alpha = \frac{2}{3}$ zuordnen. Sinkt nun die Spiegelhöhe unter die kritische, so wird der Kern in der Richtung der Z -Achse beschleunigt, da die verminderten Ablenkungsdrücke des ausfließenden Strahles dem Gewichte des Kernes nicht mehr das Gleichgewicht zu halten imstande sind. Es wird sich demnach, gemäß den Gesetzen der Wirbeltheorie¹⁾, um die Strahlachse herum eine Wirbeltrichterfläche ausbilden, deren Gleichung lautet:

$$r^2 z = \text{konstant} \quad \dots \quad (46)$$

eine Beziehung, wie sie z. B. für die Bestimmung der Meridiankurven von Saugrohren kreisförmigen Querschnittes im Wasserturbinen- und Kreiselpumpenbau Verwendung findet.²⁾

¹⁾ Siehe H. Lorenz, Technische Hydromechanik 1910, S. 365.

²⁾ F. Prasil, Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshöhlräumen, Schweiz. Bauzeitung 1903, S. 207f; siehe auch II. Abschnitt, S. 70.

In zähen Flüssigkeiten teilt sich diese Rotation des wirbelnden Kernes durch die Wirkung der Oberflächenkräfte auf die übrige im Ausflußgefäße enthaltene Flüssigkeit mit und es entstehen, je nach dem ursprünglichen Wirbelungszustande der betrachteten Flüssigkeit, mehr oder weniger komplizierte Flüssigkeitsbewegungen¹⁾.

Erscheinungen, die der eben besprochenen ähnlich sind und auf die auch schon Isaachsen²⁾ u. a. hingewiesen haben, treten auf in offenen Turbinenkammern von Wasserturbinen, die mit großer Leitkranzbreite und geringer Kammerspiegelhöhe arbeiten, sowie auch bei Segelbooten, die mit Seitenwind fahren.

Im ersteren Falle bilden sich oft mehr als meterlange senkrechte Wirbeltrichter, die ihre Entstehung, analog wie im Ausflußgefäße, den Ablenkungsdrücken der in die Leitradaußenquer-schnitte einströmenden Flüssigkeit verdanken. Sie sind für die

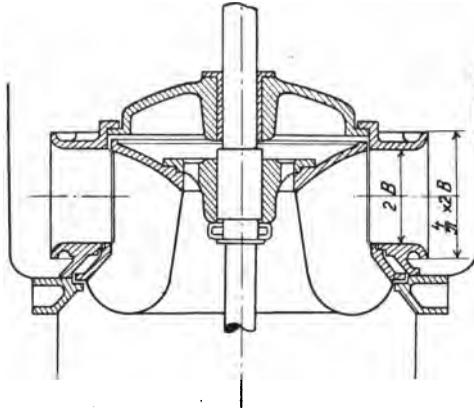


Fig. 40.

Energieumsetzung der Arbeitsflüssigkeit schädlich und können im allgemeinen nur durch Tieferlegung der Turbine beseitigt werden. Die zur Vermeidung von Strudelbildung nötige Mindesthöhe des Wasserkammerspiegels über Oberkante-Leitkranz berechnet sich wie folgt:

¹⁾ Über den Einfluß der Zähigkeit siehe auch Dr. Ing. A. Schneider, Mitteilungen über Forschungsarbeiten. V. D. I. H. 213 (1919).

²⁾ I. Isaachsen, Innere Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten und Gasen, Z. V. D. I. 1911, S. 266.

Der Leitradaußenquerschnitt ist äquivalent einer rechteckigen Ausflußöffnung von unendlicher Länge, deren Kontraktionskoeffizienten wir nach Gleichung (5) gefunden haben zu $\alpha = \frac{\pi}{4} = 0,7854$.

Um einen möglichst verlustlosen Stromverlauf zu erhalten, wird man daher die Einlaufkanten des Leitkranzes so ausbilden, wie dies in Fig. 40 angedeutet ist und in der Praxis heute schon vielfach ausgeführt wird: $\left(B_0' = \frac{4}{\pi} B_0 \right)$. Der Ablenkungsdruck der einströmenden Flüssigkeit bestimmt sich dann, wenn wir den Druck in *A* gleich h_a Meter setzen und mit ξ einen Geschwindigkeitsfaktor bezeichnen, der den Geschwindigkeitsverlusten durch fehlerhafte Zuströmungsverhältnisse, dem Fließzustand des Wassers usw., gerecht wird, ($\xi = 0,95 \sim 1,00$), nach früherem zu:

$$P_z = \frac{\pi^2}{8} \xi^2 (h_k - h_a) \gamma \quad \dots \quad (47)$$

Dieser Druck hat dem Gewichte einer Wassersäule von

$$P_w = \left(h_k + \frac{B_0}{2} \right) \cdot \gamma \quad \dots \quad (48)$$

das Gleichgewicht zu halten. Nach Gleichsetzung der Beziehungen (47) und (48) ergibt sich

$$\left(\frac{\pi^2}{8} \xi^2 - 1 \right) (h_k - h_a) = \frac{B_0}{2} + h_a \quad \dots \quad (49)$$

und daraus

$$h_k \geq h_a + \frac{B_0 + 2 h_a}{2 \left(\frac{\pi^2}{8} \xi^2 - 1 \right)} \quad \dots \quad (50)$$

Da die Beziehung besteht

$$h_k - h_a = \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{w_a^2}{2g} \quad \dots \quad (51)$$

wenn wir mit w_a die Geschwindigkeit im Leitradaußenquerschnitte bezeichnen, können wir Gleichung (50) auch umformen in

$$\frac{w_a^2}{2g} \geq \frac{\xi^2 (B_0 + 2 h_a)}{2 \left(\frac{\pi^2}{8} \xi^2 - 1 \right)} \quad \dots \quad (50a)$$

Gleichung (50) bzw. (50a) gibt die Bedingung für das Verschwinden der Strudelbildung und besagt,

1. daß die kritische Kammerspiegelhöhe um so größer wird, je größer h_a , bzw. je größer die Geschwindigkeit ω_a ist,
2. daß sie mit der Leitradbreite B_0 wächst,
3. daß schon ein geringer Geschwindigkeitsverlust

$$\left(\frac{1 - \zeta^2}{\zeta^2}\right) \cdot \frac{\omega_a^2}{2g}, \quad h_k \text{ beträchtlich vergrößert.}$$

Zwecks tunlichster Beschränkung der kritischen Kammer-
spiegelhöhe empfiehlt es sich daher, — soweit die gegebenen Be-
triebsverhältnisse dies gestatten —, h_a und B_0 möglichst klein
zu halten und für möglichst verlustlose Zuführung des Betriebs-
wassers zu den Leitkränzen vorzusorgen.

Bei Segelbooten, die gezwungen sind, mit Seitenwind zu
fahren, ist es die durch das Quertreiben des Bootes erzeugte
Querströmung des Wassers vorn am Bug, die, analog wie früher,
Anlaß zur Bildung eines in diesem Falle horizontalen Wirbels
bildet, der an der Luvseite des Bootes längs dessen Kiellinie ver-
läuft und erst weit hinter dem Fahrzeug im Kielwasser endet.

Der Rückdruck des ausfließenden Strahles auf das Aus-
flußgefäß — die sog. Strahlreaktion —, läßt sich aus dem
Verlaufe der Stromlinienflächen nach Gleichung (24a) und (24b)
ermitteln. Bei geschlossener Ausflußöffnung ist der Druck G auf
die kreisförmige Bodenfläche des Gefäßes AA (Fig. 38) gleich

$$G = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \gamma \quad \dots \dots \dots (52)$$

wenn h die Spiegelhöhe in Metern und R den Halbmesser des
Gefäßbodens bedeutet. Wird nun der Ausflußquerschnitt ge-
öffnet und tritt bei gleichbleibender Spiegelhöhe h ein Behar-
rungszustand der Strömung nach den von uns abgeleiteten Ge-
setzen ein, so gilt folgendes:

Der veränderliche statische Druck p in kg/qm längs der
Bodenfläche AA bestimmt sich unter Vernachlässigung der Nach-
füllgeschwindigkeit ω'' aus der Gleichung

$$\frac{p - p_0}{\gamma} + \frac{\omega'^2}{2g} = h = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (53)$$

wobei p_0 den auf der Spiegeloberfläche lastenden (Atmosphären)-
Druck in kg/qm und ω' die allgemein veränderliche Totalgeschwin-
digkeit längs der Bodenfläche AA bedeutet. ω' ist gemäß Gleichung (32) proportional der Ausflußgeschwindigkeit

$$\omega' = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0$$

Daraus
$$\frac{\omega'^2}{2g} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \cdot h \quad \dots \quad (32a)$$

womit Gleichung (53) übergeht in

$$p - p_0 = h\gamma - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \cdot h\gamma \quad \dots \quad (53a)$$

Auf dem Differentiale der Bodenfläche

$$dF = 2\pi \cdot r \, dr,$$

lastet demnach der Differentialdruck:

$$dP = (p - p_0) \cdot dF = 2\pi r \cdot dr \cdot \left\{ h - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \cdot h \right\} \cdot \gamma \quad \dots \quad (54)$$

Daraus

$$P = \int_{r=r_0}^{r=R} dP = 2\pi \cdot h \cdot \gamma \int_{r_0}^R r \cdot dr - 2\pi \cdot h \cdot \gamma r_0^4 \int_{r_0}^R \frac{dr}{r^3} \quad (55)$$

bzw.

$$P = \left(\pi R^2 \cdot h + \pi r_0^2 \left[\frac{r_0}{R} \right]^2 \cdot h - 2\pi r_0^2 h \right) \cdot \gamma \quad \dots \quad (56)$$

Nehmen wir R gegenüber r_0 so groß an, daß wir den zweiten Summanden vernachlässigen können, so wird

$$P = (\pi R^2 - 2\pi \cdot r_0^2) \cdot h \cdot \gamma \quad \dots \quad (57)$$

Zu diesem unmittelbaren Drucke auf die Bodenfläche kommt nun noch ein Summand hinzu, der von den Strömungsverhältnissen im Ausflußquerschnitte herrührt. Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß die Fliehkräfte der strömenden Flüssigkeit einen Druck erzeugen, der dem Gewichte der Flüssigkeitssäule über der Ausflußöffnung vom Spiegel des Ausflußgefäßes bis zum engsten Querschnitte des Strahles das Gleichgewicht hält:

$$P_z = \pi \cdot r_0^2 \left(h + \frac{2}{3} r_0 \right) \cdot \gamma.$$

Dieser Druck — gewissermaßen der Auflagerdruck der mit P_z belasteten trichterförmigen (Flüssigkeits-) Platte im Ausflußquerschnitte (Fig. 38) — muß nun auch vom Ausflußgefäße aufgenommen werden, so daß die entgültige Belastung des Gefäßbodens bei Ausfluß sich ergibt zu

$$P' = P + P_z = \left(\pi R^2 \cdot h - \pi r_0^2 \cdot h + \frac{2}{3} \cdot \pi r_0^3 \right) \cdot \gamma \quad (58)$$

und damit der Rückdruck des Ausflußstrahles aus der Diffe-

renz von Gleichung (52) und (58) zu

$$S_r = G - P' = \left\{ \pi r_0^2 h - \frac{2}{3} \pi r_0^3 \right\} \cdot \gamma = F_0 \cdot h \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{h} \right) \cdot \gamma \quad (59)$$

$$= F_0 \cdot h \cdot \eta \cdot \gamma$$

in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. η nimmt bei gegebener Größe der Ausflußöffnung mit wachsendem h zu und wird für praktische Rechnungen meist gleich 1 gesetzt.

Wir hätten die Rechnung auch so durchführen können, daß wir uns die gesamte ausfließende Flüssigkeitsmasse in einem Punkte vereinigt und mit der mittleren Neigung sämtlicher Stromelemente des Austritts querschnittes gegen die Horizontale, α_m , durch letzteren hindurchtreten denken. Wir haben dann für den Rückdruck in vertikaler Richtung wie für das gewöhnliche Reaktionsgefäß die Beziehung

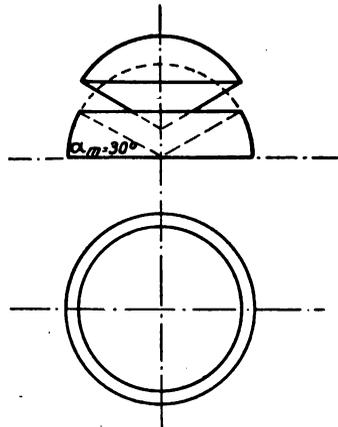


Fig. 41.

$$R_v = 2 F_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} \cdot \sin \alpha_m \quad (60)$$

unter Vernachlässigung der Nachfüllgeschwindigkeit.¹⁾ Die Summe sämtlicher Neigungen über dem Ausstromquerschnitte bildet, wie beim Geschwindigkeitsvolumen, die über dem Ausströmquerschnitte errichtete Halbkugel (Fig 41). Die mittlere Neigung α_m findet sich durch Teilung des Halbkugelvolumens in zwei gleich große Volumina, von denen das eine ein zentraler Kugelausschnitt ist, zu

$$\alpha_m = 30^\circ \quad \dots \dots \dots (61)$$

womit Gleichung (60) übergeht in

$$R_v = S_r = F_0 \cdot h \cdot \gamma \quad \dots \dots \dots (62)$$

Hierin ist allerdings der geringe Einfluß der Strömung unterhalb der Ausflußöffnung, im Gegensatze zu dem aus Gleichung (59) berechneten Werte, nicht berücksichtigt.

¹⁾ Siehe Hütte, I. Band, 21. Aufl., S. 323.
Weill, Hydrodynamik.

IV. Abschnitt.

Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit.

1. Theoretische Grundlagen.

Für die bloß unter dem Einflusse der Schwerkraft stehende, stationäre Parallelströmung einer idealen Flüssigkeit gehen die Eulerschen Bewegungsgleichungen mit

$$\begin{aligned} q_x &= 0; & q_y &= 0; & q_z &= g; \\ \omega_x &= 0; & \omega_y &= 0; & \omega_z &= \omega; \end{aligned}$$

über in

$$g - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \dots \dots \dots (1)$$

und integriert

$$\frac{\omega^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - z = \text{konst.} \dots \dots \dots (2)$$

Gleichung (2) ist nach Bernoulli gleichzeitig die Energiegleichung der Gewichtseinheit der Flüssigkeit für die betrachtete Strömung.

Wird nun ein solcher Strom durch eine gekrümmte Fläche aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, so tritt am Beginne der Krümmung eine Beschleunigungskomponente der Flüssigkeitselemente auf, die auf der Strombahn senkrecht steht und die wir, nach Lorenz¹⁾, als Zwangsbeschleunigung bezeichnen wollen. Dieser Beschleunigungskomponente entspricht eine Zentripetalkraft oder ein Bahndruck Q , dem durch die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Fliehkraft C das Gleichgewicht gehalten wird. Der Bahndruck Q bzw. die Fliehkraft C sind nun bloß Funktionen der örtlichen Lage des Flüssigkeitselementes im Kraftfelde der Fliehkraft, so daß wir für den Stromfaden im Krümmer unsere Energiegleichung (2) durch Hinzufügen einer weiteren Energiefunktion

$$E' = \Phi(x', y', z') \dots \dots \dots (3)$$

¹⁾ Siche II. Lorenz, Technische Mechanik 1902, S. 94.

erweitern können auf

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - z + \Phi(x', y', z') = \text{konst.} \quad \dots \quad (4)$$

Dabei bedeuten x', y', z' die Koordinaten eines längs der äußeren Begrenzungskurve des gekrümmten Strahles verschiebbaren Koordinatensystemes (Fig. 42). Nach Einführung der

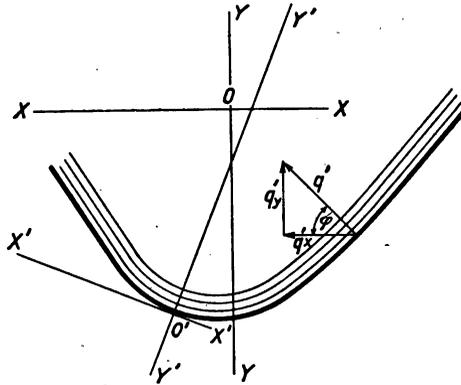


Fig. 42.

Zwangsbeschleunigung q' , die im betrachteten Punkte mit der X-Achse den Winkel φ einschließen möge (Fig. 42), erhalten wir für einen horizontalen Krümmung mit $q'_z = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -q'_x = -q' \cdot \sin \varphi \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= +q'_y = +q' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

und daraus nach Multiplikation mit

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \varphi \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

und Addition der hierbei erhaltenen Terme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{ds} = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

Wegen

$$d s^2 = d x^2 + d y^2$$

bzw.

$$d s d^2 s = d x d^2 x + d y d^2 y$$

geht Gleichung (7) über in

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

Gleichung (8) besagt, daß durch das Auftreten der Zwangsbeschleunigung die Bahngeschwindigkeit des Flüssigkeitselementes unverändert bleibt, so daß wir, vom Einflusse der Schwerkraft abgesehen, mit

$$\frac{w^2}{2g} = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (9)$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (2) Gleichung (4) auch schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} \frac{w^2}{2g} &= \text{konst.} \\ \frac{p}{\gamma} - z &= \text{konst.} \\ \Phi(x', y', z') &= \text{konst.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4a)$$

Da wir der Flüssigkeit keine Energie von außen zugeführt haben und ihr Gehalt an kinetischer Energie auch unter dem Einflusse der Zwangsbeschleunigung konstant bleibt, kann die durch die Fliehkräfte erzeugte zusätzliche Energie nur als Druckenergie auftreten, sich also nur in einer Druckerhöhung nach dem durch Gleichung (4a) bestimmten Gesetze äußern. Gleichung (3) läßt sich daher auch schreiben:

$$\Phi(x', y', z') = \frac{\Delta p(x' \cdot y' \cdot z')}{\gamma} + \Phi' \cdot (x', y', z') = \text{konst.} \quad \dots (3a)$$

Gleichung (4a) besagt

1. daß die einerseits durch die Potentialkraft der Schwere, andererseits durch die Wirkung der Fliehkräfte in der strömenden Flüssigkeit auftretenden Energiemengen von einander vollkommen unabhängig sind,
2. daß die durch die Fliehkräfte erzeugten Druckzunahmen

die potentielle Energie der Flüssigkeitselemente nicht erhöhen¹⁾, so daß

3. das Arbeitsvermögen der Flüssigkeit wegen Konstanz ihres kinetischen Energieinhaltes, auch in der Krümmung, nach Gleichung (2) konstant ist.

Wir stehen hier also vor dem Paradoxon, daß eine, in der strömenden Flüssigkeit meßbar auftretende, durch eine Potentialkraft erzeugte Energiemenge ohne Arbeitsabgabe bzw. Erhöhung des Arbeitsvermögens der Flüssigkeit wieder verschwindet. Für diese Erscheinung läßt sich indessen eine Erklärung finden, wenn wir die Strömung nach Fig. 43 in drei Teile zerlegen: $\overline{1a}$, \overline{ab} , $\overline{b2}$. Von diesen Teilstrecken gehören $\overline{1a}$ und $\overline{b2}$ einem System *A* (z. B. der Erde) an, während \overline{ab} sich auf einem anderen, von

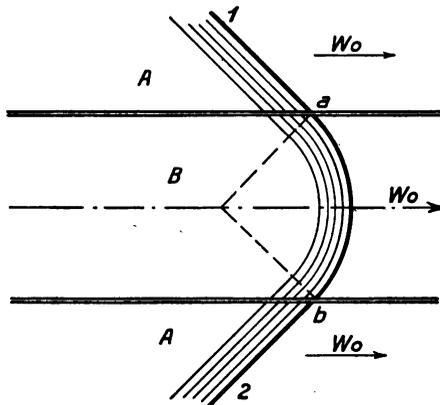


Fig. 43.

dem ersten unabhängigen System *B* befindet. Die Flüssigkeit in den Strecken $\overline{1a}$, \overline{ab} , $\overline{b2}$ stehe zunächst unter dem alleinigen Einflusse der Erdschwere mit der Krafrichtung *Z*, so daß sich eine Strömung im Kanale nach Gleichung (2) einstellt. In der Stromstrecke \overline{ab} entsteht aber hierbei durch die Wirkung der Fliehkräfte eine Drucksteigerung bzw. zusätzliche Druckenergie der Flüssigkeit, die dem gegenüber *A* beweglich gedachten Sy-

¹⁾ Daß es hierbei gleichgültig ist, in welcher Weise die Druck-
erhöhung $\frac{\Delta p(x', y', z')}{\gamma}$ erfolgt, ob, sprunghaft oder allmählich ansteigend, bzw. abfallend, hat schon Bánki in seinen eingangs erwähnten Arbeiten nachgewiesen.

stem B eine Beschleunigung in der Richtung X erteilt, wobei dessen Bewegung eine fortschreitende oder drehende sein kann. Nehmen wir nun weiters an, daß wir dem System A eine mit B in jedem Zeitpunkte nach Größe und Richtung gleiche Geschwindigkeit erteilen können, so daß sich also an der relativen Lage der Stromstrecken $\overline{1a}$, \overline{ab} und $\overline{b2}$ zueinander nichts ändert, und wir sie für das Durchströmen der Flüssigkeit als in Ruhe befindlich betrachten können, so ist die Arbeit, die zur Bewegung des Systemes B aufgewendet wird, gleich dem durch die Fliehkräfte in der Bahnstrecke \overline{ab} erzeugten Energiezuwachs der Flüssigkeit (Gleichung (3)), der im übrigen für das System A wirkungslos bleibt. Wir werden dieser Anschauung bei Anwendung unserer Schlußfolgerungen auf die Kreisradtheorie im VI. Abschnitte wieder begegnen.

Die bisher abgeleiteten Gleichungen sind allgemein nur unter der Voraussetzung stationärer Parallelströmung gültig. Wenn wir die Frage erörtern, ob beim Durchströmen des Krümmers die Parallelität der Stromfäden überhaupt aufrecht erhalten werden kann, brauchen wir uns nur zu vergegenwärtigen, daß im Eintrittsquerschnitte des Krümmers die auf die Flüssigkeit ausgeübte Fliehkraft bzw. der entsprechende Bahndruck pro Flächeneinheit den Wert hat

$$Q = -C = -M \cdot \frac{\omega^2}{\varrho_m} \dots \dots \dots (10)$$

Da die Masse M gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist, also in jedem Punkte desselben die Einheitsmasse m konstant ist, können die einzelnen Flüssigkeitsteilchen nur dann im Gleichgewichte sein bzw. verlustfrei in den Krümmer eintreten, wenn sie den gleichen Betrag an Fliehkraft bzw. Bahndruck aufnehmen, so daß in allen Punkten eines Stromquerschnittes

$$-Q = m \cdot q' = m \cdot \frac{\omega^2}{\varrho_m} = \text{konst.} \dots \dots \dots (10a)$$

bzw. die Zwangsbeschleunigung

$$q' = \frac{\omega^2}{\varrho_m} = \text{konst.} \dots \dots \dots (11)$$

Da die Geschwindigkeit ω nach Gleichung (9) ohnehin konstant ist, ergibt sich für ϱ_m

$$\varrho_m = \text{konst.} \dots \dots \dots (12)$$

Für alle Punkte des Stromquerschnittes im Bereiche der Krümmung muß demnach, bei unveränderlicher Energieaufteilung nach Gleichung (2), der Krümmungsradius der Strombahn konstant sein. Diese Bedingung schließt aber den Verlauf der Stromlinien als Parallele bzw. konzentrische Strombahnen aus. Die Flüssigkeitselemente sind vielmehr gezwungen, statt ebener, allgemein räumliche Kurven zu durchlaufen. Man kann also, strenge genommen, beim Durchströmen des Krümmers auch unter Voraussetzung idealer Flüssigkeit nicht von einer Parallelströmung sprechen. Wenn wir dennoch die für letztere gültigen Beziehungen unserer Betrachtung zugrunde legen, so geschieht dies, weil aus den Ergebnissen der einschlägigen Versuche hervorgeht, daß die tatsächlichen Abweichungen des Strömungsverlaufes den für Parallelströmung aufgestellten Energiesatz nur unwesentlich zu beeinflussen vermögen.

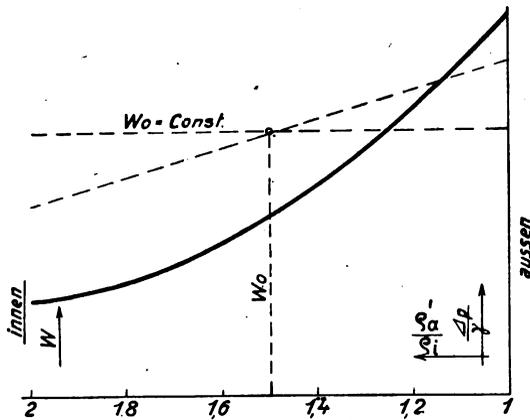


Fig. 44.

Die durch die Wirkung der Fliehkräfte bedingte Zunahme des Druckes in der Krümmung $\frac{\Delta p}{\gamma}$ ist gleich

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = M \cdot \frac{\omega^2}{\rho_m} \dots \dots \dots [13]$$

Dabei ist die Masse M eine Funktion der Gestalt des gekrümmten Kanales bzw. des äußeren (ρ_a) und inneren Krümmungshalbmessers (ρ_i) der betrachteten Stromschichte. Angenähert ist

$$M = K_1 \frac{\rho_a^2 - \rho_i^2}{\rho_a} \dots \dots \dots (14)$$

und daraus mit $\frac{\omega^2}{\rho_m} = \text{konstant}$ nach Gleichung (11)

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = K_2 \cdot \frac{\rho_a^2 - \rho_i^2}{\rho_a} \dots \dots \dots (15)$$

Die Spannungszunahme wird demnach mit zunehmender Größe des Krümmungshalbmessers der äußeren Stromschichtbegrenzung — also im Strahle von innen nach außen — wachsen (Fig. 44).

Würden diese Spannungszunahmen als Änderungen der potentiellen Energie der Flüssigkeit in den aufeinander folgenden Stromschichten aufgefaßt, so entspräche dieser Druckverteilung eine linear von außen nach innen wachsende Querschnittsgeschwindigkeit, Verhältnisse, wie sie etwa bei der in den meisten Lehrbüchern der Hydromechanik behandelten Potentialbewegung der Flüssigkeit in einem rechtwinkeligen Knie abgeleitet werden.¹⁾

Um einen Ausgangspunkt für die Erörterung des Stromverlaufes im Krümmer bzw. eine angenäherte Vorstellung desselben zu gewinnen, denken wir uns wieder ein Ausflußgefäß (Fig. 44), dessen rechteckige Ausflußöffnung die Breite B und die Länge L gleich der Länge des Gefäßes hat. Innerhalb des Ausflußgefäßes sei seiner ganzen Länge nach ein gekrümmtes Leitblech $\beta\beta$ angebracht, entlang welchem die Flüssigkeit wie in einem Krümmer von rechteckigem Querschnitte ausströmt. Die lichte Eintrittsweite dieses Krümmers sei D , der allgemein veränderliche Krümmungshalbmesser des Leitbleches r .

Denken wir uns zunächst, die zwischen Leitblech $\beta\beta$ und Querschnittskante a in die Ebene der Bodenfläche \overline{AA} fallende Ausflußöffnung \overline{ab} sei verschlossen, so lastet auf jedem ihrer Punkte der statische Druck der Wasserspiegelhöhe im Ausflußgefäße von h Metern. Wird nun die Öffnung freigegeben, so werden — da nach unserer Ableitung die Zwangsbeschleunigung der gekrümmten Bahn keine Änderung der Bahngeschwindigkeit hervorzurufen vermag — sämtliche Flüssigkeitselemente im Ausflußquerschnitte auf die gleiche Geschwindigkeit

$$w_0 = \sqrt{2g \cdot h} \dots \dots \dots (16)$$

¹⁾ Siehe auch H. Lorenz, Technische Hydromechanik 1910, S. 283.

den Abfluß in der Richtung $\overline{z z}$. Aus dem Diagramm ist

$$\omega_{zm} = a \cdot \omega_0 = \frac{v}{2} \cdot \omega_0 \quad (17)$$

und damit

$$a = \frac{v}{2} \quad (18)$$

wobei

$$v = \frac{v^0 \cdot \pi}{180} \quad (19)$$

Wegen der allgemein gültigen Kontinuitätsbedingung¹⁾

$$\int \omega \cdot \cos \delta \cdot dF = 0 \quad (20)$$

muß aber das in den Krümmer bei $\overline{a b}$ mit der über den ganzen Eintrittsquerschnitt vorläufig als gleich groß angenommenen Geschwindigkeit ω_0 einströmende Flüssigkeitsvolumen auch in der Richtung $\overline{v v}$ bzw. $\overline{z z}$ abströmen. Es muß also sein

$$F_1 \cdot \omega_0 = F_v \cdot \omega_{zm} \quad (21)$$

bzw.

$$D \cdot L \cdot \omega_0 = \overline{a b} \cdot L \cdot a \cdot \omega_0 \quad (22)$$

und daraus

$$\frac{D}{a b} = a = \frac{v}{2} \quad (22a)$$

Gleichung (22a) dient nun zur Berechnung jener Strombahnkurven, längs welchen die reibungs- und wirbelfreie Strömung der von uns abgeleiteten Bedingungsgleichung (9) — $\frac{\omega_0^2}{2g} = \text{konstant}$ — genügt. Nehmen wir ein Koordinatensystem an, dessen Ursprung mit dem Beginne der Krümmung der äußeren Strombegrenzungsfläche zusammenfällt (Fig. 46), so können wir Gleichung (22a) auch schreiben:

$$\frac{x}{y} = \frac{v}{2} \quad (22b)$$

bzw.

$$v = \frac{2x}{y} \quad (22c)$$

Ferner ist

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } v' = \text{cotg } v = \text{cotg } \frac{2x}{y} \quad (23)$$

¹⁾ Siehe H. Lorenz, Technische Hydromechanik 1910, S. 263.

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich, nach Entwicklung von $\cotg \nu$ in eine Reihe, für die Strombahnlinien bei konstanter Strömungsgeschwindigkeit in großer Annäherung die Gleichung

$$y^2 = C x - 1,35 x^2 \dots \dots \dots (24)$$

Die Konstante C bestimmt sich aus den gegebenen Krümmungsverhältnissen bzw. aus der Krümmereintrittsweite und der Größe

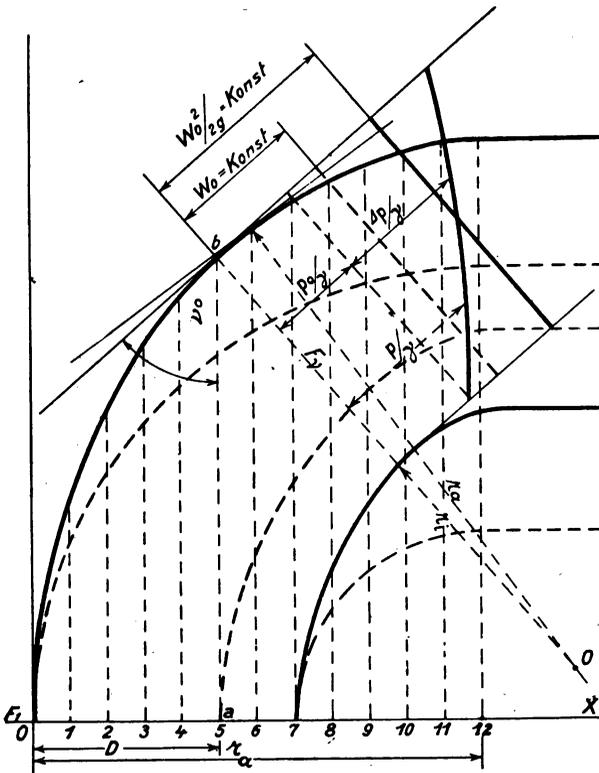


Fig. 46.

des Ablenkungswinkels. So wird z. B. für $x = r_a$ und $\nu = \frac{\pi}{2}$, $C = 3,00 r_a$, womit Gleichung (24) übergeht in

$$y^2 = 3,00 \cdot x \cdot r_a - 1,35 x^2 \dots \dots \dots (25)$$

Wäre das Leitblech ein elastisches, am oberen Ende eingespanntes Stahlband, auf dessen Rückseite der Druck $M \cdot \frac{w^2}{\rho_m}$ kg/cm²

lastet oder ein unter dem gleichen Drucke stillstehendes Flüssigkeitsvolumen, so würde dasselbe unter dem Einflusse der Strömung angenähert eine Form nach Gleichung (24) annehmen, und der Strahl, da seine Elemente erst in einer gewissen Entfernung vom Querschnitte F_v , der Richtung $\overline{v v}$ parallel strömen, in der Krümmung wegen der Kontinuitätsgleichung (20) eine geringe Verdickung erfahren. Die weitere Umlenkung in die Richtung $\overline{z z}$ erfolgt wie beim Ausflusse freier Strahlen durch stetiges Anpassen der Geschwindigkeitsrichtungen an die $\overline{z z}$ -Richtung, sofern nur die Leitblechkurve der Gleichung (24) genügt. Der abgelenkte Strahl fließt schließlich mit der über den Querschnitt nach Größe und Richtung gleichen Geschwindigkeit ω_0 in der Richtung $\overline{z z}$ ab.

Der nach Gleichung (12) konstante Krümmungsradius der Strombahnen, ϱ_m , kann aus den bekannten Ansätzen für den Ablenkungsdruck kreisender Flüssigkeiten abgeleitet werden. Es ist nämlich

$$\frac{P_a}{F_a} = p_a = \frac{M_1 (\omega_0 \cdot \sqrt{2 [1 - \cos \nu]})}{F_a} = M_2 \cdot \frac{\omega_0^2}{\varrho_m} \quad (26)$$

Dabei bedeutet M_1 die Masse der in der Zeiteinheit durch den Krümmer strömenden Flüssigkeit in kg/m^{-1} , M_2 die Masse der auf die Flächeneinheit (cm^2) der äußeren Strombegrenzungsfläche in der Krümmung wirksamen Flüssigkeit in kg/m^{-1} , F_a die äußere Strombegrenzungsfläche in cm^2 , ω_0 die Strömungsgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde, ν den Ablenkungswinkel in Graden, P_a den gesamten, durch die Fliehkräfte erzeugten Ablenkungsdruck auf die Krümmeraußenwand in kg, und p_a den spezifischen Ablenkungsdruck in kg pro cm^2 .

Nun ist nach Fig. 47 und 48

$$M_1 = D \cdot L \cdot \omega_0 \cdot \frac{\gamma}{g} = (r_a - r_i) L \cdot \omega_0 \cdot \frac{\gamma}{g} \quad (27)$$

und M_2 gemäß Gleichung (14), (Fig. 47 und 48),

$$M_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{2 r_a} \quad (14a)$$

Für F_a können wir setzen

$$F_a = L \cdot k_1 \cdot r_a \quad (28)$$

Für eine Umlenkung im rechten Winkel, also mit $\nu = 90^\circ$, geht Gleichung (26) über in

$$\frac{\sqrt{2}}{k_1} = \frac{r_a + r_i}{2 \rho_m} \dots \dots \dots (26a)$$

und daraus mit

$$\frac{r_a + r_i}{2} = r_m,$$

$$\rho_m = k_2 \cdot r_m \dots \dots \dots (29)$$

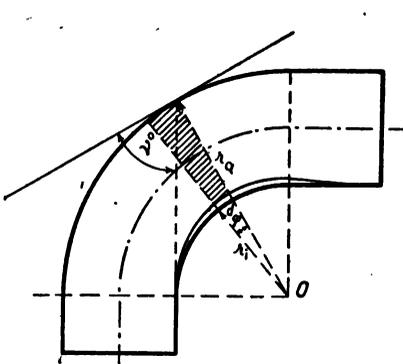


Fig. 47.

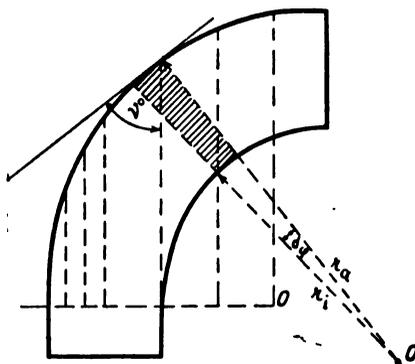


Fig. 48.

k_2 ist im allgemeinen größer als 1, (für F_a als Mantelfläche eines Kreiszyinders vom Radius r_a , ist $k_2 = 1,11$), so daß wir in der Horizontalprojektion des Krümmers angenähert folgendes Strömungsbild erhalten (Fig. 49): Die in der Nähe der Innenwand des Krümmers liegenden Stromlinien, gleich jenen in der Nähe der Außenwand, konvergieren gegen eine neutrale Stromlinie, deren horizontale Projektion der Bedingung (29) entspricht. Bei dieser Bewegung werden die einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die ja den Raum gleichmäßig erfüllen müssen, gezwungen sein, sich gegenseitig auszuweichen.

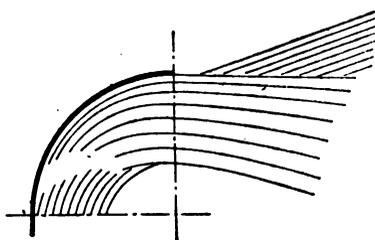


Fig. 49.

Da sie nach unserer Ableitung sich vollkommen im Gleichgewichte befinden und wir reibungsfreie Flüssigkeit voraussetzen, ist dies auch, abgesehen von etwaigen Einflüssen der Schwerkraft, ohne

Aufwand an Energie möglich. Wir erhalten demnach das Bild einer geflechtartigen, unendlich fein verteilten Strömung, mit gleicher Energieaufteilung über den ganzen Stromquerschnitt.

Sehr deutlich ist diese Strömungserscheinung in den Krümmungen der offenen Flußläufe zu beobachten, besonders wenn das einbuchtende Ufer steil und hoch und der Krümmungsradius klein ist. Der Stromstrich, der in der geraden Flußstrecke mit der Strommitte ungefähr übereinstimmt, nähert sich in der Krümmung der konkaven Uferseite in Übereinstimmung mit der oben abgeleiteten Beziehung. Die energischen Stromschichten der Oberfläche drängen dabei gegen die Uferbucht und zwingen dadurch die tieferen und langsamer fließenden Stromschichten gegen das ausbuchtende Ufer. Es entsteht eine Art schraubenförmige Bewegung, die ein Abtragen des Geschiebes von der konkaven nach der konvexen Uferseite zur Folge hat¹⁾.

Daraus ergibt sich als praktische Schlußfolgerung, daß der Anschluß von Oberwassergerinnen von Wasserkraftanlagen an offene Flußläufe in Krümmungen stets an der konkaven Uferseite durchgeführt werden sollte, um das betriebstörende Anhäufen von Geröll etc., an den Einlaufschützen und -Rechen möglichst zu vermeiden.

Folgt die äußere Strombegrenzungsfläche nicht den durch Gleichung (22a) bzw. Gleichung (24) gegebenen Gesetzen, wie dies z. B. bei dem in der Technik allgemein verwendeten Kreiskrümmmer (Fig. 50) der Fall ist, so ist folgendes zu beachten:

Während früher die Beziehung bestand,

$$\frac{D}{\overline{a b} \cdot a} = 1$$

ist nunmehr

$$\frac{D}{\overline{a b} \cdot a} = \alpha' > 1 \quad \dots \dots \dots (22'a)$$

wenn wir, wie oben, die Geschwindigkeitsrichtungen über den Querschnitt $\overline{a b}$ mit von a nach b stetig zunehmender Neigung gegen $\overline{a b}$ annehmen. Wegen der Kontinuität der Strömung muß demnach die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt F_v proportional der Einschnürungszahl α' größer sein als die vorläufig über den ganzen Eintrittsquerschnitt als gleichgroß angenommene

¹⁾ Siehe E. von Seydlitzsche Geographie, Breslau 1914, S. 744 und 694.

Geschwindigkeit w_0 . Der Strahl erleidet also in der Umlenkung eine Einschnürung. Diese Geschwindigkeitsvermehrung beim Übergange vom Eintrittsquerschnitte F_1 zu F , kann nach unserer Energiegleichung (2), bei gleichbleibendem z nur durch eine Abnahme des Druckes $\frac{p}{\gamma}$ der strömenden Flüssigkeit im Querschnitte

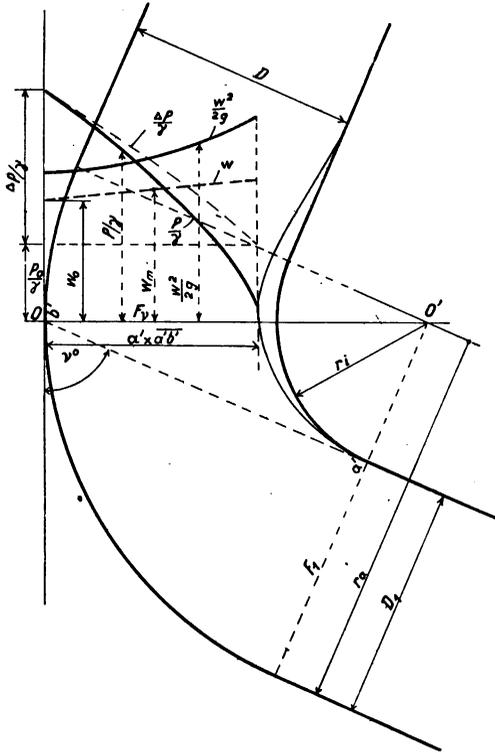


Fig. 50.

F_2 gegenüber dem im Querschnitte F_1 herrschenden hervorgerufen werden. Wenn wir uns nun die Eintrittsweite des Kreisrümmers D_1 in n gleiche Teile zerlegen, entsprechend n parallel zuströmenden Stromfäden gleichen Volumens, so finden wir, daß die Kontraktion nach Gleichung (22'a) von außen nach innen stetig zunimmt. Dieser Kontraktionszunahme entspricht aber in den aufeinanderfolgenden Stromfäden eine von außen nach innen stetig zunehmende Stromgeschwindigkeit. Im Kreis-

krümmer nimmt demnach bei reibungs- und wirbelfreier Strömung die Strömungsgeschwindigkeit proportional dem Abstände des betrachteten Querschnittspunktes von der äußeren Strombegrenzungsfläche zu. Setzen wir voraus, daß diese Proportionalität linear ist, so entspricht der geschilderten Geschwindigkeitsverteilung — abgesehen von den durch die Fliehkräfte erzeugten Drücken — gemäß Gleichung (2) eine von innen nach außen parabolische Zunahme des Druckes über den Querschnitt (Fig. 50). Ist bei geschlossenem Krümmer der statische Druck am Eintritt in den Krümmer nur gering, so kann unter Umständen an der Innenseite des Krümmers ein Unterdruck entstehen, der um so größer wird, je kleiner der Krümmungsradius r_a im Verhältnis zur Krümmerweite D , bzw. je schärfer die Krümmung ist. Diese ungleiche Geschwindigkeits- bzw. Druckverteilung erstreckt sich erfahrungsgemäß auch auf den Eintrittsquerschnitt¹⁾, in welchem die für den verlustfreien Eintritt der Flüssigkeit in den Krümmer aufgestellte Beziehung (11) für die Zwangsbeschleunigung gültig ist. Demgemäß sind hier den von außen nach innen größer werdenden Geschwindigkeiten w auch von außen nach innen größer werdende Krümmungshalbmesser ρ zugeordnet. Dieser Umstand, im Verein mit dem Auftreten der Strahlkontraktion α' nach Gleichung (22'a) bedingt im Kreiskrümmer, ideale Flüssigkeit vorausgesetzt, eine Ablösung des Strahles von der Innenwand. Die wie früher auftretende Konvergenz bzw. Divergenz der Strombahnen bedingt, daß im Kreiskrümmer beständig Flüssigkeitselemente größerer Geschwindigkeit und geringeren Druckes (innen) in solche kleinerer Geschwindigkeit und größeren Druckes (außen) übergehen und umgekehrt — ein Vorgang, der sich bei Voraussetzung reibungs- bzw. wirbelfreier Strömung ohne Energieverluste vollziehen kann. Die Strömung im Kreiskrümmer ist also nichts anderes als ein Wechselspiel solcher unter Düsenwirkung (von außen nach innen) bzw. Diffuserwirkung (von innen nach außen) stehender Scharen von Stromelementen, die den Krümmer in räumlichen (spiralartigen) Kurven durchlaufen.

Der weitere Verlauf der Strömung besteht, wie früher, in einem stetigen Übergange zur Parallelströmung, wobei der fließende

¹⁾ Siehe A. Pfarr, Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb 1912, S. 43 (Fußnote).

Strahl den Rohrquerschnitt wieder völlig ausfüllt und die über den ganzen Querschnitt gleiche Geschwindigkeit w_0 annimmt.

Ist die Ablenkung eine kontinuierliche, wie z. B. in den gebräuchlichen Rohrspiralen, so bleibt die für den Querschnitt F , festgestellte Geschwindigkeits- bzw. Druckverteilung, sowohl im Falle des Krümmers nach Gleichung (24) als auch im Falle des Kreiskrümmers, auf dem ganzen Wege der Krümmung gleichförmig erhalten, solange in der Form der äußeren Strombegrenzung und in der Krümmerweite D keine Veränderung eintritt.

Die in vorstehendem gegebene Darstellung der Strömungsverhältnisse im Krümmer ist, wie erwähnt, bloß als eine mehr oder weniger genaue Annäherung der tatsächlich auftretenden Verhältnisse zu betrachten. Wir haben bereits festgestellt, daß die Strombahnkurven räumlich verlaufen und daher die Stromfunktion eine dreidimensionale sein muß, deren analytische Gestalt sich unserer Behandlung entzieht. Immerhin konnten wir auf Grund unserer Ableitungen einiges zur Beschreibung ihres Verlaufes aussagen und dadurch eine logische Vorstellung des Strömungsvorganges gewinnen. Diese Vorstellung bedarf nun der Bestätigung durch den wissenschaftlichen Versuch, insbesondere wenn wir uns vor Augen halten, daß wir es in der Natur fast ausnahmslos mit Flüssigkeiten zu tun haben, die mit Reibung bzw. mit Wirbelbildung behaftet sind. Diese Umstände beeinflussen die rechnermäßigen Ergebnisse unserer Untersuchungen in größerem oder geringerem Maße, ohne daß wir imstande sind, bei der heute noch unvollkommenen Entwicklung der hydraulischen Reibungstheorie und im Hinblick auf den verwickelten Charakter der Strömung selbst, dieselben analytisch mit auch nur einiger Aussicht auf Erfolg zu berücksichtigen.

Für die vorliegende Arbeit stand zum Zwecke dieser Prüfung vor allem die ausgezeichnete Darstellung der Versuche zur Verfügung, die von Bánki im Maschinenlaboratorium der Technischen Hochschule zu Budapest an einem Krümmer mit rechteckigem Querschnitte durchgeführt wurden¹⁾. Weitere Unterlagen lieferten die Ergebnisse einiger eigener Versuche des Verfassers, die Kontraktion freier Strahlen im Krümmer u. a. m. betreffend.

¹⁾ D. Bánki, Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit, Z.V.D.I. 1913, S. 17.

Im folgenden sollen die Ergebnisse dieser Versuche mit Rücksicht auf die von uns abgeleiteten theoretischen Grundlagen der Strömung im Krümmer eine eingehende Besprechung erfahren.

2. Versuchsergebnisse zum Probleme der kreisenden Flüssigkeit.

A. Die Versuche Bánkis.

Die Versuchseinrichtung Bánkis, bezüglich deren näherer Beschreibung auf die a. o. O. erwähnte Veröffentlichung zu verweisen ist, bestand in der Hauptsache aus einem unter Druck

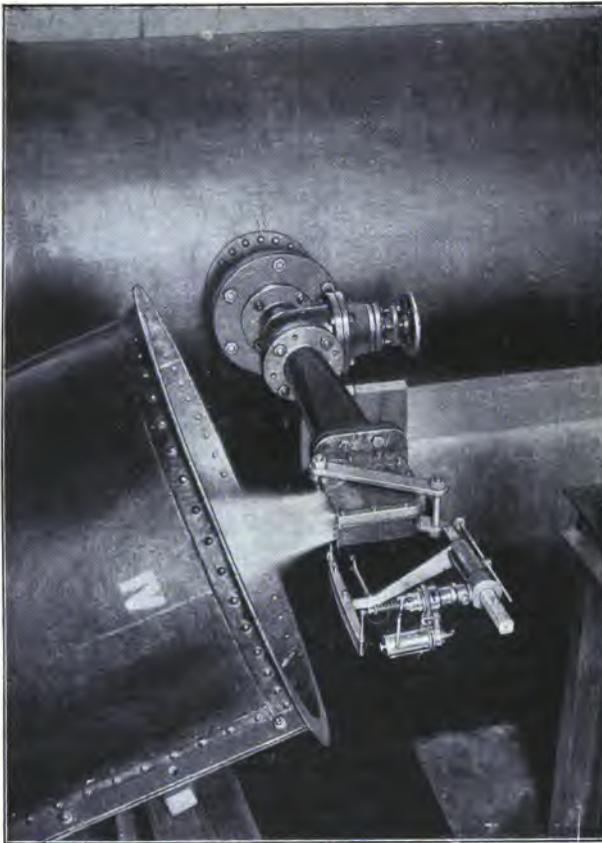


Fig. 51.

gehaltenen Wasserkessel, an den ein Regulierverschieber und Stutzen horizontal angeschlossen waren (Fig. 51). In letzterem ging der

ursprünglich kreisförmige Querschnitt in den rechteckigen über. An der rechteckigen Mündung des Stützens war ein horizontaler Krümmer gleichen Querschnittes angebracht, der mit einer sinn-

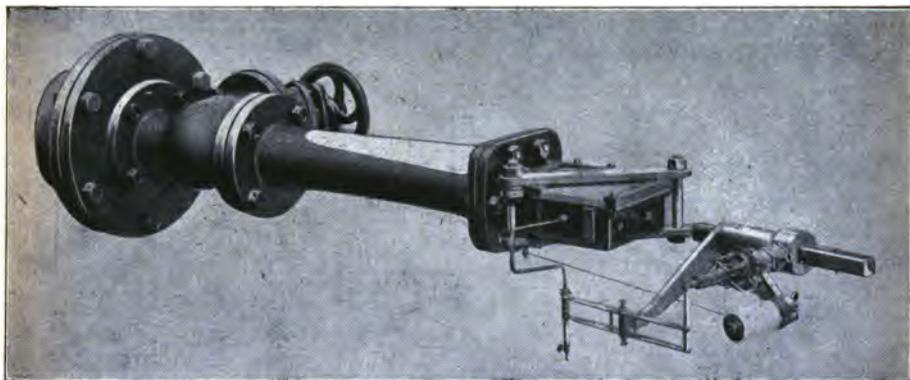


Fig. 52.

reichen Meßvorrichtung verbunden war (Fig. 52, 53), die es gestattete, sowohl Geschwindigkeitswerte als auch Geschwindigkeitsrichtungen in den Querschnittspunkten des Strahles im Krüm-

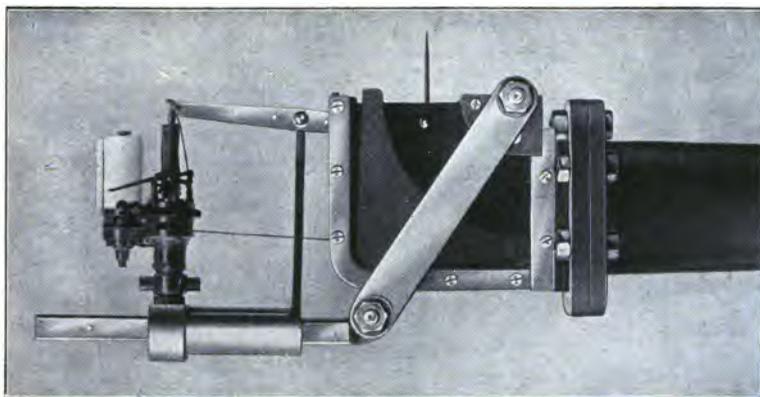


Fig. 53.

mer festzustellen und die gewonnenen Ergebnisse in Indikator-
diagrammen aufzuzeichnen (Fig. 54 und 55). Fig. 56 zeigt die
Größenverhältnisse und die Lage jener Krümmerquerschnitte, in

denen Messungen vorgenommen wurden. Der ursprüngliche Krümmereintrittsquerschnitt, dessen Lichtweite 100 mm betrug, wurde

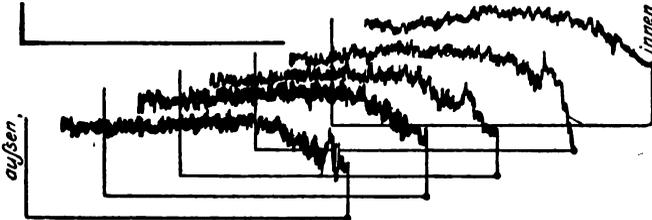


Fig. 54.

für die Versuche bei gleichbleibender Höhe (50 mm) durch eine Holzeinlage auf 80 mm × 50 mm vermindert. Die äußere Strom-

Querschnitt IV.

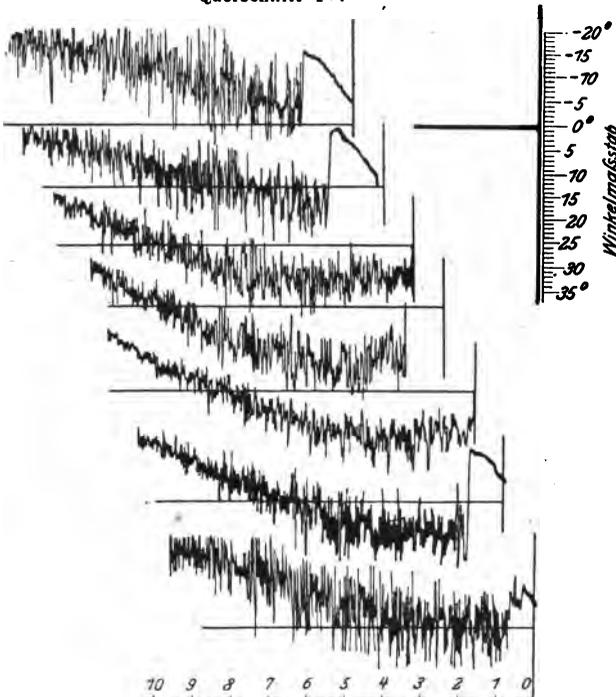


Fig. 55.

begrenzung bildete hierbei ein elastisches, am Krümmereintritte befestigtes Stahlband, das sich unter dem Einflusse der strömen-

den Flüssigkeit bis zu einem gewissen Grade deformieren konnte. Der Regulierschieber wurde derart eingestellt, daß für die Hauptversuche die mittlere Geschwindigkeit im Krümmereintrittsquerschnitte unveränderlich 5,5 m pro Sekunde betrug.

Die Messungen wurden in den aus Fig. 56 ersichtlichen Querschnitten I, II, III, IV in Horizontalebene mit verschiedenen Abständen von der Krümmerbodenfläche ausgeführt. Fig. 56, 57, 58, 59 zeigen die Ergebnisse in übersichtlicher Form. Die

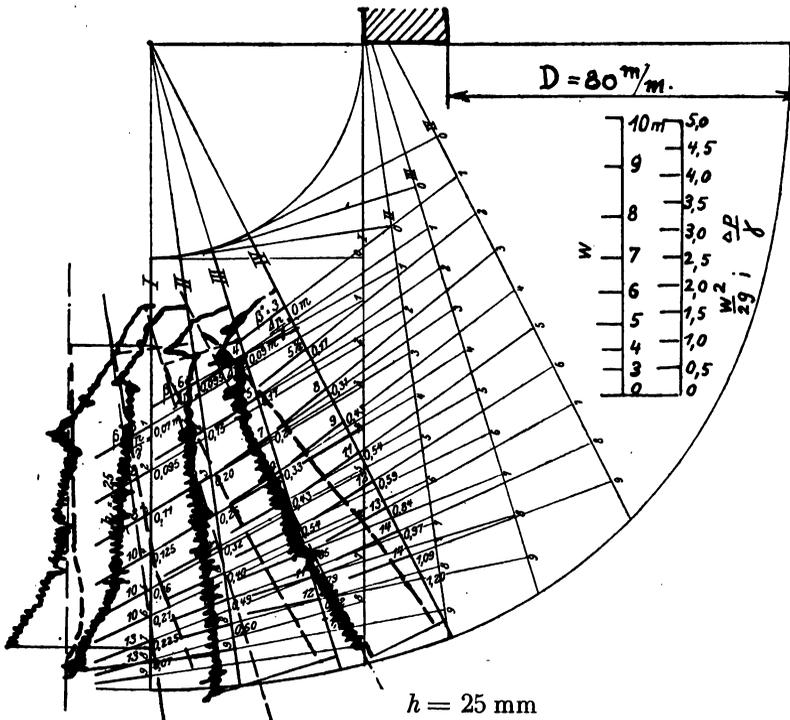


Fig. 56.

Geschwindigkeiten sind hierbei nach Größe und Richtung aufgetragen, während die Abweichungen in vertikaler Richtung gegen die Querschnittsnormale in Graden — positiv nach oben, negativ nach unten — den einzelnen Querschnittspunkten beigeschrieben ist. Da der Einfluß der Wandreibung in der mittleren Stromschichte am geringsten sein dürfte, ist dort auch die relativ ge-

ringste Abweichung des tatsächlichen Stromverlaufes vom theoretischen Stromverlaufe der idealen Flüssigkeit zu erwarten. Wir wollen daher zunächst die dieser Stromschichte (Abstand von der Krümmertbodenfläche = 25 mm) entsprechenden, in Fig. 56 dargestellten Diagramme der Diskussion unterziehen. Sie seien, der größeren Deutlichkeit halber, in Fig. 60, 61, 62 und 63, den vier Meßquerschnitten entsprechend, noch einzeln aufgezeichnet. Die beigegefügteten Maßstäbe gelten für die Druck- bzw. Geschwindigkeitshöhen und für die Geschwindigkeiten.

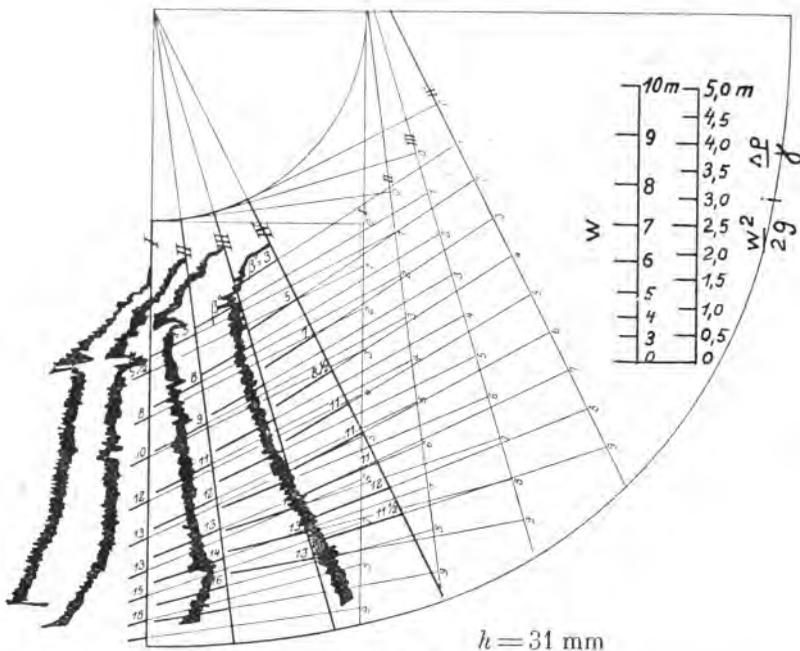


Fig. 57.

Wir bemerken zunächst, daß das die äußere Strombegrenzung bildende elastische Stahlband tatsächlich eine Deformation erfahren hat, deren angenäherte Symmetrie auf eine ziemlich gleichmäßige Verteilung der Ablenkungsdrücke der strömenden Flüssigkeit über die äußere Stromgrenzfläche schließen läßt. Weiters finden wir, daß die äußere Stromgrenzkurve in ihrem ganzen Verlaufe vom Eintrittsquerschnitte bis zum Querschnitte F_v — der

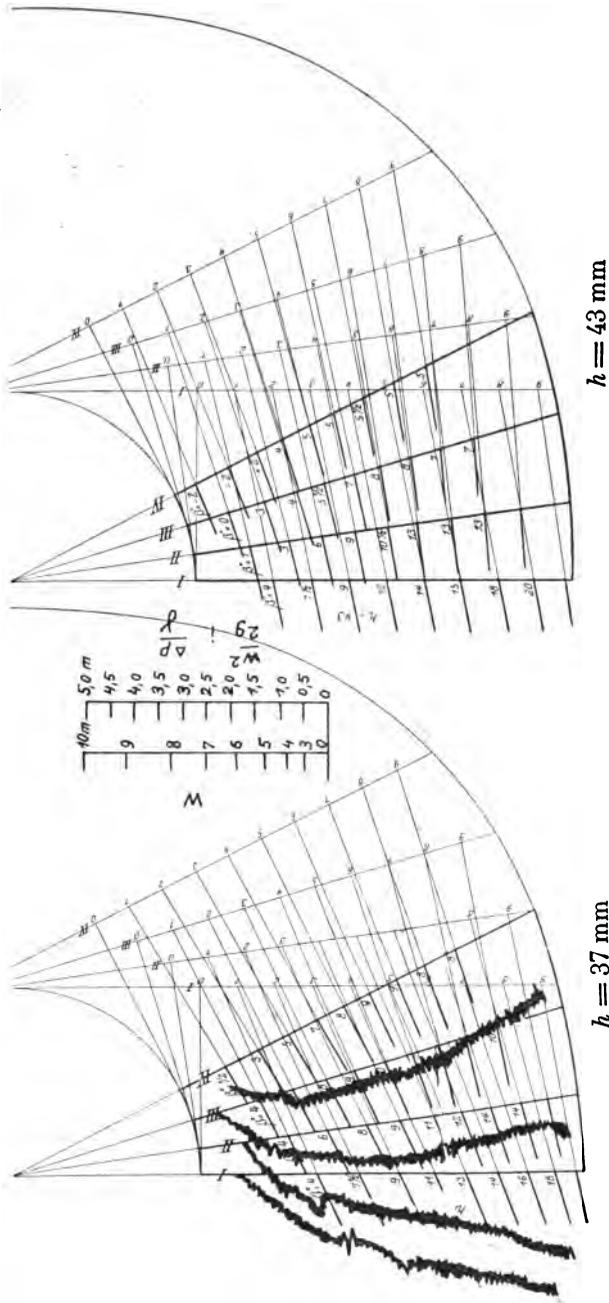


Fig. 59.

Fig. 58.

hier mit dem Querschnitte IV beinahe identisch ist — in großer Annäherung der von uns abgeleiteten Gleichung (24) entspricht, wobei die Konstante C der letzteren Gleichung der durch die Versuchsanordnung bedingten Deformation des Stahlbandes entspricht. Es war demnach die durch die Gleichung (22a) ausgesprochene Bedingung über den ganzen Eintrittsquerschnitt erfüllt, und es stand zu erwarten, daß die nach unserer Theorie daraus resultierende Konstanz der Stromgeschwindigkeit — $w = w_0 = \text{konst.}$ — über den ganzen Querschnitt F , bzw. IV

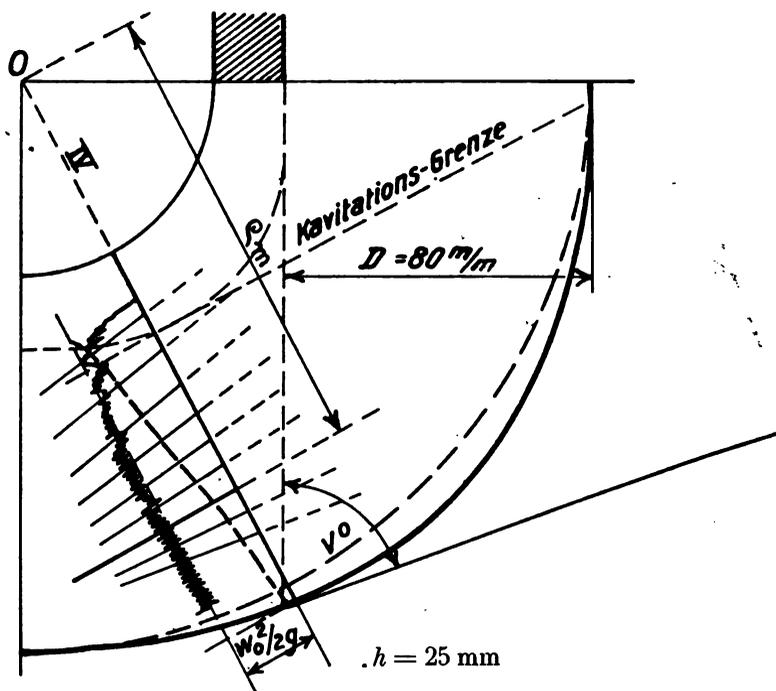


Fig. 60.

sich einstellen würde. Tatsächlich zeigt Fig. 60 eine überraschend gute Übereinstimmung mit der theoretischen Forderung. Die geringe Geschwindigkeitszunahme gegen die Innenseite zu entspricht der geringen Abweichung des tatsächlichen aus dem Diagramme bestimmten Wertes α von dem durch Gleichung (22a)

definierten. Es ist aus dem Diagramme:

$$D = 80 \text{ m/m}; \quad \overline{ab} = 138 \text{ m/m}; \quad \nu^0 = 63^0$$

$$\nu = \frac{63 \cdot \pi}{180} = 1,1.$$

Demnach

$$\left\{ a = \frac{80}{138} = 0,58 \right\} > \left\{ \frac{\nu}{2} = 0,55 \right\}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitte IV muß demnach im Verhältnisse

$$a' = \frac{2a}{\nu} = \frac{0,58}{0,55} = 1,04$$

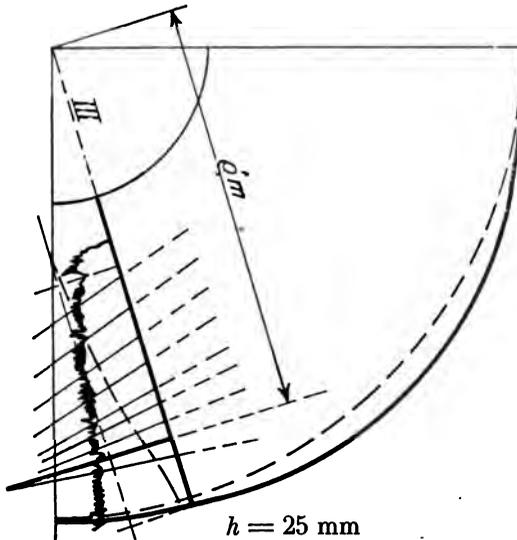


Fig. 61.

größer sein als die Krümmereintrittsgeschwindigkeit. Es ist

$$\omega_m^{(IV)} = 1,04 \omega_0 = 5,7 \text{ m/Sek.},$$

ein Wert, der sich auch aus Fig. 57 ergibt.

Der nach Gleichung (12) für alle Punkte des Querschnittes konstante Krümmungsradius ϱ_m der Strombahnen bestimmt sich

aus Gleichung (29) mit $r_m = 114$ mm, $\nu^0 = 63^\circ$, $k_2 = 1,14$ (diese drei Werte sind aus dem Diagramm (Fig. 60) abgemessen bzw. bestimmt) zu

$$\varrho_m = 1,14 r_m = 130 \text{ m/m.}$$

Die Horizontalprojektionen der Geschwindigkeitsrichtungen werden demnach im Querschnitte IV auf die im Mittelpunktsabstände $\varrho_m = 130$ mm annähernd normal zur Querschnittsebene stehende konvergieren, wie dies das Versuchsergebnis auch bestätigt. Es wird angenähert ebenso viel Flüssigkeit von außen nach innen als von innen nach außen strömen. Da nach unserer Ableitung im vorliegenden Falle alle Elemente des Querschnittes den gleichen

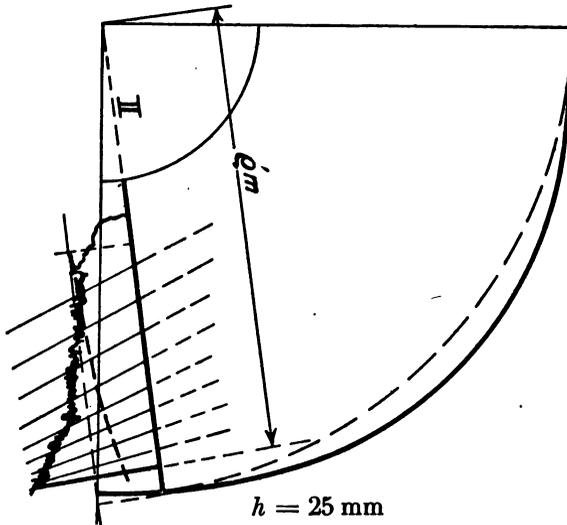


Fig. 62.

Energieinhalt besitzen, muß, bei gleicher Geschwindigkeitsverteilung, auch die Energieaufteilung in jedem Punkte des Krümmers vom Eintrittsquerschnitte bis zum Querschnitte IV gleich sein. Dabei ist allerdings der energievernichtende Einfluß von Reibung und Wirbelung im Innern der (zähen) Flüssigkeit, insbesondere aber an den Grenzschichten der Strömung, nicht inbegriffen. Dieser Einfluß ist indessen bei Krümmern, die den von uns abgeleiteten Gesetzen entsprechen, demnach auch beim Versuchskrümmers, praktisch offenbar nur unbedeutend.

Die nach Gleichung (15) berechnete und im Diagramme Fig. 60 punktiert eingezeichnete Kurve der durch die Fliehkraft

bedingten Spannungszunahme $\frac{\Delta p}{\gamma}$ stimmt ebenfalls mit der experimentell festgestellten gut überein, wenn man, wie es die Beziehung (15) voraussetzt, die Stromgeschwindigkeit über den ganzen Querschnitt auf $\omega = \omega_0 =$ konstant gleich 5,5 m pro Sekunde reduziert.

Bei Betrachtung von Fig. 61, 62 und 68 müssen wir uns vor Augen halten, daß der Versuchskrümmer mit seiner offenen Ausflußmündung nicht einem Krümmer in geschlossener Rohrleitung, sondern eher einer Zelle im Leit- bzw. Laufrade einer Wasser-

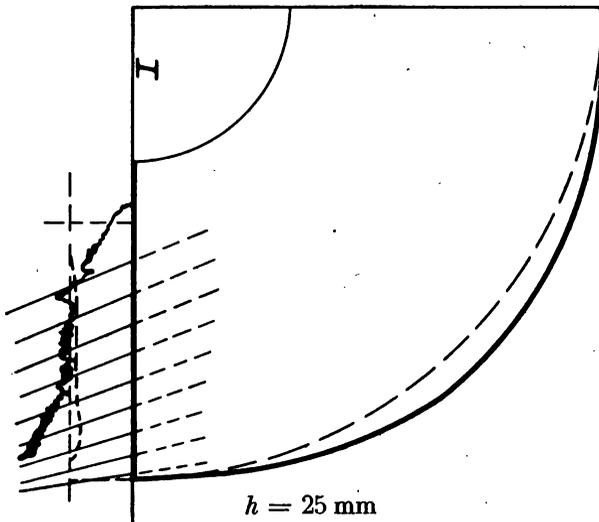


Fig. 63.

turbine oder Kreiselpumpe entspricht. Bis zum Querschnitte F_1 (IV) verläuft die Strömung im Rohrleitungskrümmer und im Zellenkrümmer gleichartig, so wie wir sie abgeleitet und an Hand der Diagramme (Fig. 60), nachgewiesen haben. Im weiteren Verlaufe tritt jedoch ein beträchtlicher Unterschied zwischen den Strömungen in den beiden Krümmerarten auf. Während beim Krümmer in geschlossener Rohrleitung die gerade Fortsetzung der Krümmeraußenwand bewirkt, daß sich die Strömung ungefähr so entwickelt, wie beim Ausflusse freier Strahlen durch eine scharfkantige Bodenöffnung bei allmählichem Übergange zur Parallelströmung, strecken sich bei Krümmern der zweiten Art,

demnach auch beim Versuchskrümmers, infolge des Fehlens jener geraden (ablenkenden) Wandstrecke, alle Strombahnen gegen die äußere Ausflußkante. Es fließen nun mehr Flüssigkeitsteilchen von innen nach außen als von außen nach innen mit dem Resultate, daß mit dem dadurch bedingten Anwachsen des Energieinhaltes der strömenden Flüssigkeitselemente im Krümmerquerschnitte von innen nach außen auch die Geschwindigkeit von innen nach außen zunimmt, während gegen die Krümmerinnenwand zu, wo die abfließenden Flüssigkeitsteilchen nicht in genügender Zahl ersetzt werden, teilweise Luftleere bzw. Kavitation auftritt. Diese letztere Erscheinung ist auch von Bánki beobachtet worden, der übrigens eine ganz scharfe Grenze zwischen der kompakten Strahlmasse und der Kavitationszone feststellte. Diese Grenze läßt sich in den Geschwindigkeitsdiagrammen (Fig. 61, 62 und 63) deutlich erkennen. Nach unserer Definition müßte sie in Querschnitt IV (Fig. 60), nicht erscheinen. Tatsächlich liegt sie hier außerhalb der normalen Krümmerweite (Krümmereintrittsweite = 80 mm). Die Kavitation rührt also hier nicht von den oben angeführten Umständen her, sondern ist offenbar durch Wirbelung des im toten Raume des Krümmers von der Strömung periodisch mitgerissenen Stillwassers bedingt. Durch die Streckung der Strombahnen gegen die äußere Ausflußkante vergrößern sich die Krümmungsradien der Stromkurven, namentlich an der Krümmeraußenwand, so daß bei dem gleichzeitigen Geschwindigkeitsabfall gegen die Innenwand zu, die Gleichgewichtsbedingung (11), $q = M \frac{w^2}{\rho} = \text{konst.}$, nicht mehr be-

bestehen kann und sich die einzelnen Flüssigkeitselemente nur unter Energieaufnahme bzw. Energieabgabe kreuzen oder vereinigen können. Im Gegensatz zu den Verhältnissen im ersten Teile des Krümmers, Querschnitt IV inbegriffen, wo sämtliche Stromelemente gewissermaßen als gleich starke und gleich lebenskräftige Individuen auftreten, bieten die Verhältnisse in den Querschnitten III, II, I das von Bánki treffend gebrauchte Bild von den »Verdrängern« und den »Verdrängten«. Die durch den Energieinhalt der »Verdrängten«-Elemente bereicherten »Verdränger«-Elemente sind unter Entwicklung großer Geschwindigkeiten in die Nähe der äußeren Strombegrenzung getreten, während die ersteren gegen die Innenwand zu langsamer nachfließen. Eine weitere Folge dieses Strömungsverlaufes ist die stetige Ab-

nahme der Fliehkraftdrücke gegen die Ausflußöffnung zu, die durch die erwähnte Streckung der äußeren Strombahnen und die Geschwindigkeitsverminderung an der Innenseite der Krümmung bedingt ist, ein Umstand, den wir bei Behandlung der Kreiselradtheorie noch zu berücksichtigen haben werden.

Der Einfluß der Wandreibung auf den von uns abgeleiteten theoretischen Strömungsverlauf ist aus den Diagrammen (Fig. 57, 58 und 59) zu erkennen. Ohne denselben würde die Strömung — Krümmerhöhe als unendlich vorausgesetzt — in allen Schichthöhen des Krümmers ungefähr so verlaufen, wie in Schichthöhe 25 mm (Fig. 56). Der durch die Flüssigkeitsreibung an den Krümmerwandungen bedingte Geschwindigkeitsabfall in Wandnähe hat daselbst, wegen Gleichung (11), eine schärfere Krümmung der Strombahnen gegen die Innenseite zur Folge, wozu übrigens auch die Ablenkung der mit einer Vertikalkomponente strömenden Flüssigkeitselemente an der oberen bzw. unteren horizontalen Begrenzungsfläche beiträgt. Ein weiterer Einfluß besteht darin, daß unmittelbar an der Wand, wegen der bei turbulenter Strömung auftretenden Unstetigkeiten, Gleichung (11) überhaupt nicht erfüllt werden kann und sich dort unter der Einwirkung der im Innern der Flüssigkeit herrschenden Zentrifugaldrücke eine vermehrte Querströmung von außen nach innen einstellt, die natürlich die darunter bzw. darüber liegenden Stromschichten beeinflusst. Es ergibt sich demnach als hauptsächlichster Einfluß der Wandreibung eine von der Mitte nach oben und unten zunehmende Verschiebung der Strombahnrichtungen gegen die Innenseite des Krümmers, wie sie aus Fig. 57, 58 und 59 deutlich zu erkennen ist. In ihr finden wir auch die Bestätigung unserer Behauptung, daß im Bereiche des Krümmers vom Eintritte bis zum Querschnitte IV stets ebenso viele Flüssigkeitselemente von außen nach innen, wie von innen nach außen strömen¹⁾. Denn während die mittleren Schichten einen Überschuß der nach außen strömenden Elemente aufweisen, ist es in den obersten

¹⁾ Siehe auch Diagramm Fig. 52. Bildet man nämlich die Summe jener positiven und negativen Werte, die man durch Multiplikation der aus den Diagrammen zu entnehmenden Radialkomponenten der Querschnittsgeschwindigkeiten mit den zugehörigen Flächenelementen des Stromquerschnittes erhält, so ergibt sich das Resultat: *o. D. h.*: Es fließen ebensoviele Flüssigkeitselemente von außen nach innen, als von innen nach außen.

bzw. untersten Schichten gerade umgekehrt. In der mittleren Schichthöhe (25 mm) äußert sich der Einfluß der Wandreibung demnach dahin, daß die zwischen ϱ_m und der äußeren Strombegrenzung fließenden Stromelemente größere Vertikal- und geringere Horizontalabweichungen der Geschwindigkeitsrichtungen gegenüber den Verhältnissen bei reibungsfreier Strömung aufweisen, während im Raume zwischen ϱ_m und der Innenwand das umgekehrte der Fall ist.

In den Querschnitten III, II und I läßt sich auch hier die Streckung der Strombahnkurven gegen die äußere Ausflußkante hin erkennen. In I sind die Geschwindigkeitsrichtungen längs irgend einer Vertikalen des Querschnittes, also in allen aufeinanderfolgenden Punkten einer Stromschichtenhöhen-Linie, beinahe parallel. Da es, wie wir gesehen haben, hauptsächlich die oberen und unteren Grenzstromschichten waren, die den Innenraum des Krümmers speisten, ersehen wir, daß deren Streckung gegen die äußere Ausflußkante hin die Hauptursache für das Auftreten der Luftleere bzw. Kavitation an der Innenseite des Krümmers ist. Der seitliche Ablenkungswinkel, den die Achse des ausströmenden Strahles mit der Achse des Krümmers bildet, ist fast genau gleich dem Mittelwerte aller über dem Querschnitt I auftretenden Neigungen der Flüssigkeitselemente ($\approx 19^\circ$).

Weitere Versuche mit erhöhter Strömungsgeschwindigkeit (mittlere Eintrittsgeschwindigkeit = 9,4 m pro Sekunde) ergaben keinerlei Abweichungen von den früher gefundenen Resultaten, womit die Unabhängigkeit des Strömungsvorganges von der absoluten Größe der Geschwindigkeit bewiesen erscheint.

Die Untersuchung des Strömungszustandes unmittelbar außerhalb des Querschnittes I — etwa den Verhältnissen im Spalte einer Wasserturbine oder Kreiselpumpe entsprechend — ergaben eine Geschwindigkeitsverteilung wie in I mit allmählich zunehmender Zersplitterung und Verzögerung der an den Strahlgrenzen fließenden Elemente, so daß in den Diagrammen schließlich zwei deutliche Kavitationsgrenzen (außen und innen) auftreten.

Zur Bestimmung des Querschnittpunktes größter Geschwindigkeit in Querschnitt II wurden die Isotachen Fig. 64 aufgenommen. Der Punkt größter Geschwindigkeit erscheint sowohl nach außen wie gegen die obere Krümmwandfläche hin verschoben. Die Verschiebung nach außen erklärt sich durch die vorerwähnte Streckung der Strombahnlinien gegen die Ausfluß-

kante zu. Die Verschiebung nach oben scheint eine Folge des Auftretens von Rotationskomponenten der Flüssigkeitselemente beim Durchströmen des Krümmers zu sein, wobei die Niveaulinien des Druckes eine der Erscheinung bei Rotation von Flüssigkeiten

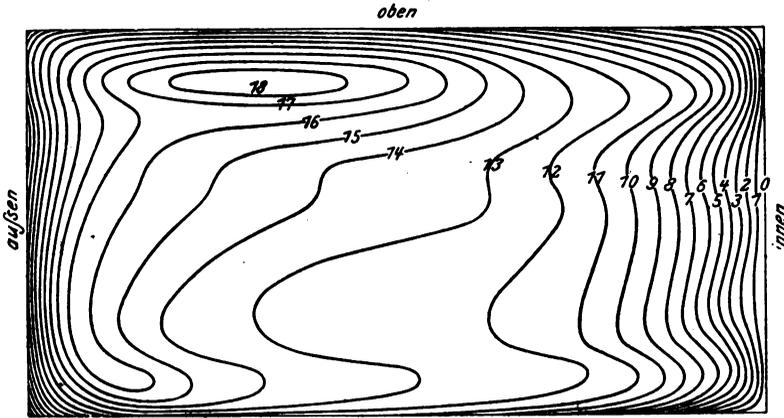


Fig. 64.

in einem horizontalen Zylinder analoge Verschiebung erleiden. Bekanntlich liegt der Druckmittelpunkt in diesem Falle um den Betrag von

$$\varepsilon = \frac{k g}{\omega^2}$$

über der Rotationsachse. (Fig. 65). Dabei bedeutet ω die mittlere Winkelgeschwindigkeit über den Querschnitt, g die Erdbeschleunigung in m pro Sek.² und k einen Faktor, der für konstante Winkelgeschwindigkeit über den Querschnitt gleich 1 wird. Da in dem betrachteten Querschnitte Rotationen von der mittleren Schichthöhe nach oben wie nach unten erfolgen, wäre zu erwarten, daß nach dieser Erklärung sich ein Geschwindigkeitsmaximum auch in der unteren Hälfte des Querschnittes einstellen müßte. Tatsächlich zeigt Diagramm (Fig. 64) die Ansätze zu einer entsprechenden Isotachen Verteilung, die offenbar durch die großen

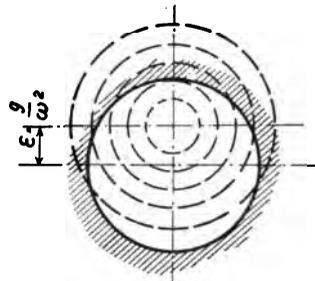


Fig. 65.

inneren Reibungs- und Wirbelverluste der Stromelemente nicht vollkommen zur Ausbildung gelangen konnte.

Das Einblasen von Luft bzw. die unter geringem Überdrucke ausgeführte Einspritzung von Fuchsinlösung in den Krümmer dienten bloß zur augenfälligeren Demonstration des vom Indikator beschriebenen Stromverlaufes.

Mehr Interesse beanspruchen die leider nicht ausführlich genug wiedergegebenen Versuche über die Strömung in einem durch eine entsprechende Holzeinlage im Versuchskrümmer hergestellten Reaktionskanal, dessen Querschnitt sich von 80 mm \times 50 mm auf 55 mm \times 50 mm am Austritte verjüngte¹⁾ und der durch einen aufgesetzten Schnabel einen Schrägabschnitt erhielt (Fig. 66). Die hier wie früher in den Querschnitten IV, III, II und I

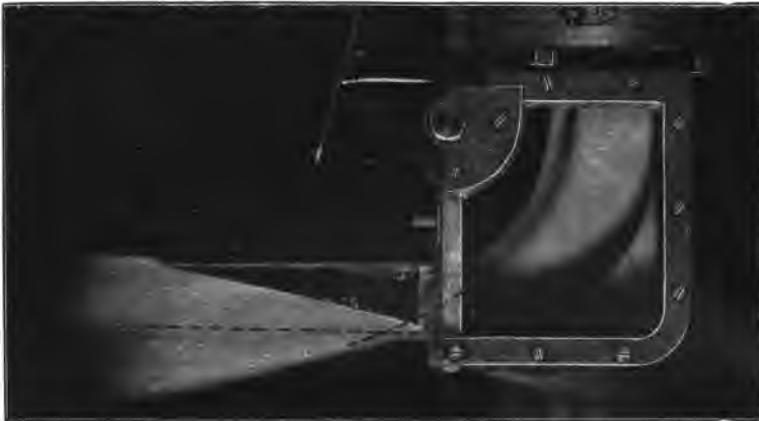


Fig. 66.

aufgenommenen Meßkugeldiagramme sind in Fig. 67, 68, 69 und 70 wiedergegeben. Die Deformation des Stahlbandes ist, soweit die Abbildung dies erkennen läßt, ungefähr dieselbe wie bei den ersten Versuchen. Die äußere Strombegrenzung entspricht demnach auch hier dem durch Gleichung (24) gegebenen Gesetze über den ganzen Eintrittsquerschnitt. Durch die Holzeinlage wird nun künstlich eine Kontraktion des Strahles im Querschnitte IV erzwungen, so daß Verhältnisse auftreten ähnlich denjenigen, die wir bei der Behandlung der Strömung im Kreiskrümmer

¹⁾ Diese Maße sind der Abbildung Fig. 66 entnommen.

weiter oben besprochen haben. Es werden sich demgemäß auf Kosten des Inhaltes an potentieller Energie von außen nach innen wachsende Geschwindigkeiten über den Querschnitt einstellen, derart, daß die mittlere Geschwindigkeit der Kontraktion des

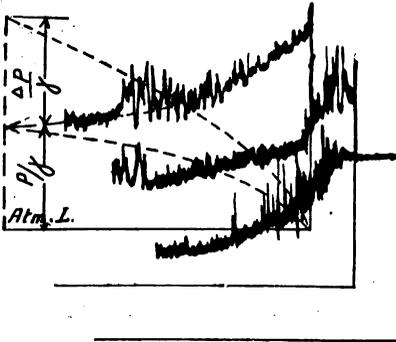


Fig. 67.

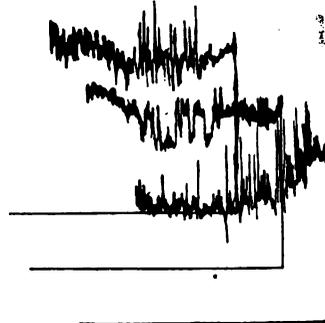


Fig. 68.

Strahles bzw. der Kontinuitätsbedingung entspricht (Fig. 67). Der weitere Verlauf der Strömung erfolgt wie bei den erstbe-

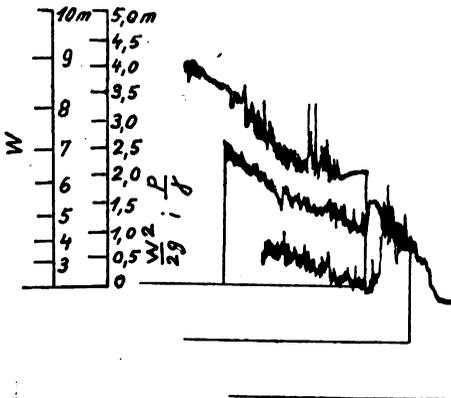


Fig. 69.

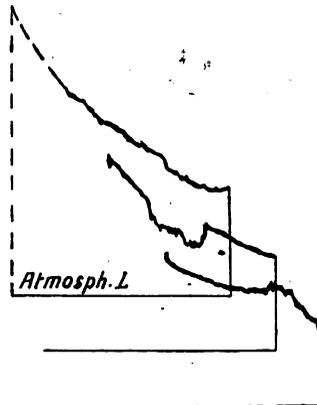


Fig. 70.

sprochenen Versuchen, nur daß hier der größere potentielle Energieinhalt (Druckenergie) der Elemente an der Außenseite des Krümmers gegenüber deren größerer Geschwindigkeit an der Innenseite im Querschnitte IV, die Geschwindigkeitszunahme gegen die äußere Ausströmkante hin beträchtlich unterstützt.

In Fig. 70 ergibt die Verlängerung der Geschwindigkeitshöhenkurve bis zur Krümmeraußenwand eine Geschwindigkeitshöhe, welche annähernd gleich ist der aus dem Diagramme (Fig. 64) zu entnehmenden maximalen Geschwindigkeitshöhe an der Innenwand plus dem Überschusse an statischer Druckhöhe an der Außenwand desselben Querschnittes (IV) gegenüber dem statischen (Atmosphären-) Druck an der Krümmerinnenseite. Trotz des aufgesetzten Schnabels ist in den Diagrammen der Querschnitte I und II (Fig. 69 und Fig. 70) die Kavitationsgrenze deutlich zu erkennen. In Fig. 67 ist auch noch unter Annahme einer mittleren Eintrittsgeschwindigkeit, $w_0 = 5,5$ m pro Sekunde, die (berechnete) Druckverteilung über den Querschnitt IV eingetragen. Die planimetrierten Druckhöhen- und Geschwindigkeitshöhen-Diagramme ergeben in der Größe ihrer Flächen Werte, die proportional sind dem Energieinhalte der Flüssigkeitsmasse in dem betrachteten Querschnitte. Führen wir die Planimetrierung für Querschnitt IV bzw. I durch unter der Annahme, daß in Querschnitt I Atmosphärendruck herrscht, so erhalten wir 1120 mm^2 bzw. 890 mm^2 für den Querschnitt IV bzw. den Querschnitt I. Es ist also auf dem Wege vom Querschnitte IV nach dem Querschnitte I ein der Fläche von 230 mm^2 proportionaler Energieinhalt der strömenden Flüssigkeit verloren gegangen.

Um die durch die Diagrammflächen dargestellten Energieinhalte miteinander vergleichen zu können, müssen wir sie beide auf die Querschnittsweite IV beziehen. Wir erhalten damit 1060 mm^2 für den Querschnitt I und 1120 mm^2 für den Querschnitt IV. Es sind demnach auf dem Wege vom Querschnitte IV nach dem Querschnitte I 60 mm^2 an Diagrammfläche gleich $5,35\%$ des im Krümmerquerschnitte IV vorhandenen Energieinhalts der strömenden Flüssigkeit durch Reibung und Wirbelbildung aufgezehrt worden.

Dem Geschwindigkeitshöhen-Diagramme allein entspricht im Krümmerquerschnitte IV eine planimetrierte Fläche von 500 mm^2 , so daß der eben berechnete Verlust in Prozenten der im Krümmereintritte tatsächlich vorhandenen mittleren Geschwindigkeitshöhe $\frac{w_0^2}{2g}$ gleich ist

$$\xi \cdot \frac{w_0^2}{2g} \Big|_{(IV)}^{(I)} = 0,12 \cdot \frac{w_0^2}{2g}.$$

Leider macht das Fehlen der Angaben über die Druckhöhen im

Eintrittsquerschnitte des Krümmers die Nachrechnung des Energieverlustes auf dem Wege vom Krümmereintritte bis zum Querschnitte IV aus den Diagrammen unmöglich. Nehmen wir dafür etwa $\frac{2}{3}$ des von Weisbach¹⁾ für einen rechteckigen Kreiskrümmers von gleicher Krümmung und lichter Weite wie der Versuchskrümmers bestimmten Verlustwertes, so erhalten wir als Gesamtverlust der Strömung durch den Krümmers nach Fig. 66

$$\xi \frac{w_0^2}{2g} \Big|_E^{(I)} = 0,25 \frac{w_0^2}{2g}.$$

Hinsichtlich der Energieverluste in Krümmern sei hier noch auf eine Mitteilung B á n k i s²⁾ verwiesen, die an Versuche anknüpft,

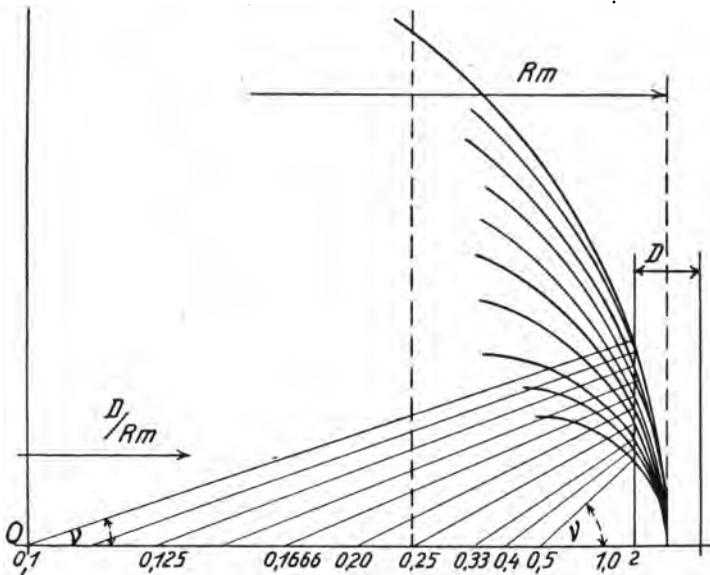


Fig. 71.

welche von Saph und Schoder, Cornell University, V. S. A., an Kreiskrümmern von kreisförmigem Querschnitt und mit Krümmungsverhältnissen $\frac{D}{R_m} = 0,26$ bis $0,1045$ ausgeführt wurden.

¹⁾ Siehe Hütte, I. Band, 21. Aufl. 1911, S. 300.

²⁾ D. B á n k i, Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit, Z. V.D.I. 1912, S. 1515.

Die Tatsache, daß, wie sich aus den Ergebnissen dieser Versuche zeigte, der Krümmungshalbmesser der Versuchsrohre nur wenig Einfluß auf die Geschwindigkeitsverteilung in den Querschnitten der Krümmen hatte, findet aus dem Diagramme (Fig. 71) ihre Erklärung. Dort sind die Krümmungsverhältnisse der Versuchskrümmen eingezeichnet und danach die mit unserer Gleichung (22a) berechnete Kurve der Einschnürungszahlen α' ermittelt (Fig. 72). Für das

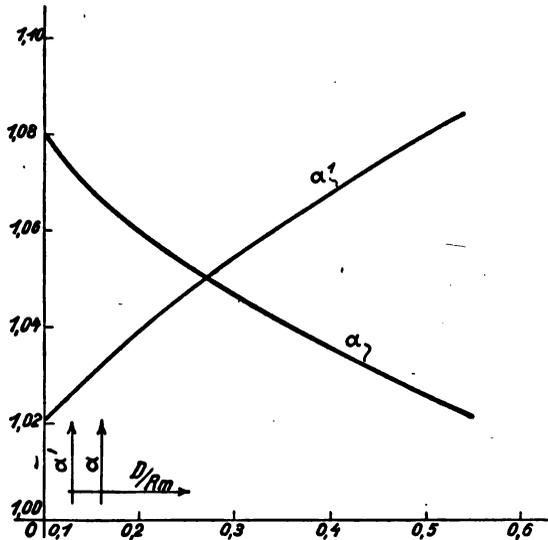


Fig. 72.

Verhältnis $\frac{D}{R_m} = 0,25$ ergibt sich ein $\alpha' = 1,047$, während einem Verhältnisse $\frac{D}{R_m} = 0,10$ ein $\alpha' = 1,022$ entspricht, demnach ein nur unbedeutender Unterschied trotz der großen Abweichung der Verhältniszahlen voneinander. Bei großen Verhältnissen $\frac{D}{R_m}$ wird jedoch α' und damit auch der Geschwindigkeitsunterschied über den Krümmen beträchtlich größer. So ist z. B. für $\frac{D}{R_m} = 0,40$; $\alpha' = 1,068$. Diese ungleichförmigere Geschwindigkeitsverteilung bei schärferer Krümmung (kleinerem Krümmungsradius) bedingt größere Wirbelverluste am Beginne und am Ende der gekrümmten Bahn, während andererseits der größere Krümmungs-

radius den spiralartigen Strombahnen einen größeren Reibungsweg bietet und damit den Anteil der Reibungsverluste erhöht. Es wird sich demnach zwischen beiden Gebieten ein Verhältnis $\frac{D}{R_m}$ finden lassen, bei dem die Summe aus Reibungs- und Wirbelverlusten ein Minimum wird. Dieses Verhältnis wurde von Saph und Schoder ermittelt zu $\frac{D}{R_m} = 0,40$.

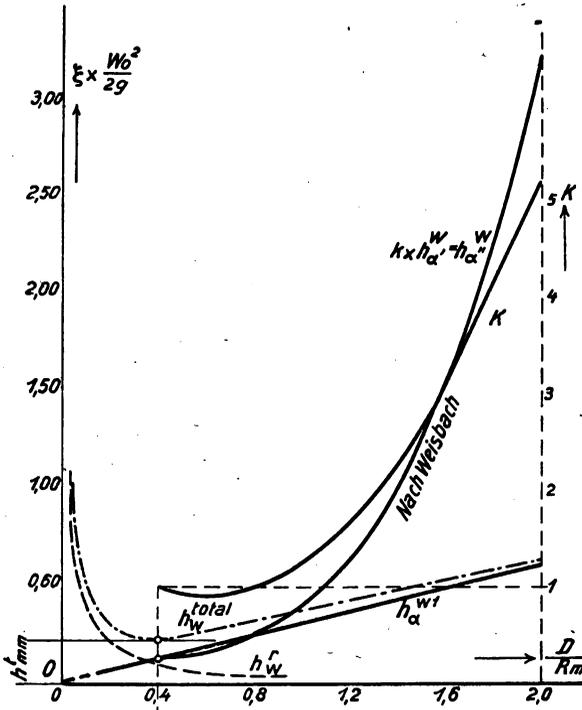


Fig. 73.

Zu diesem günstigsten Werte des Verhältnisses $\frac{D}{R_m}$ gelangen wir aber auch, wenn wir die Verlustrechnung für die Strömung im Krümmer auf Grund unserer Ableitungen durchführen. Die Verluste im Kreiskrümmer können wir zerlegen in Rohrreibungs- und Wirbelungs- bzw. Stoßverluste, welche letztere offenbar von der Größe der im Krümmer auftretenden Einschnürung, bzw. der

durch Gleichung (22'a) bestimmten Kontraktionszahl α' abhängig sind.

Der Rohrreibungsverlust für Kreiskrümmen kreisförmigen Querschnittes berechnet sich gemäß Gleichung (38) des I. Abschnittes zu

$$h_w^{(\alpha)} = \xi \frac{L}{D} \cdot \frac{w_0^2}{2g} \quad \dots \quad (30)$$

wobei für normale Verhältnisse (Gußeisen- oder Schmiedeeisenrohre) $\xi = 0,021$ zu setzen und die Länge des Reibungsweges L dem mittleren Krümmungshalbmesser proportional ist. Wir erhalten

$$h_w^{(\alpha)} = 0,021 \cdot \frac{K_1 \cdot \pi}{2 \frac{D}{R_m}} \cdot \frac{w_0^2}{2g} \quad \dots \quad (30a)$$

und für die verschiedenen Krümmungsverhältnisse $\frac{D}{R_m}$ die im Diagramme (Fig. 73) dargestellten Werte für den Reibungsverlust im Krümmer.

Setzen wir andererseits die Wirbelungsverluste proportional der Einschnürungszahl α' derart, daß

$$h_w^{(\alpha')} = k_2 \cdot \{\alpha'^2 - 1\} \cdot \frac{w_0^2}{2g} \quad \dots \quad (31)$$

so ergibt sich mit

$$\alpha' = \frac{2D}{v \cdot R \cdot \sin v}; \quad \cos v = \frac{R - D}{R}$$

$$v = \arccos \left(1 - \frac{D}{R} \right)$$

$$k_2 = 1 \text{ (angenommen!)}$$

$$h_w^{(\alpha')} = \left[\frac{4 \frac{D}{R}}{\left(2 - \frac{D}{R} \right) \cdot \left\{ \arccos \left(1 - \frac{D}{R} \right) \right\}^2} - 1 \right] \cdot \frac{w_0^2}{2g} \quad (31a)$$

Dabei ist

$$\frac{D}{R} = \frac{\frac{D}{R_m}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{R_m}}$$

Die hiernach berechneten Werte sind ebenfalls im Diagramm (Fig. 73), eingetragen. Die Summierung der beiden Verluste ergibt ein Minimum bei einem Verhältnisse $\frac{D}{R_m}$ ungefähr gleich 0,40 im Einklange mit den Ergebnissen der obenerwähnten Versuche. Als weitere Kurve sind die aus zahlreichen Versuchen abgeleiteten Angaben nach Weisbach für die Einschnürungsverluste in Kreiskrümmern rechteckigen Querschnittes eingetragen. Aus ihr scheint hervorzugehen, daß bei einem Krümmungsverhältnisse $\frac{D}{R_m} \leq 1$ der Koeffizient der Gleichung (31) k_2 ungefähr gleich 1 ist. Für $\frac{D}{R_m}$ größer als 1 nimmt k_2 beträchtlich zu und erreicht für $\frac{D}{R_m} = 2$ den Wert $k_2 = 5$, ein Umstand, der durch die bei den schärferen Krümmungen auftretende Diskontinuität der Strömung an der Innenseite des Kreiskrümmers (Kavitation, Rückströmung) seine Erklärung findet.

B. Versuche des Verfassers.

Die nachfolgend beschriebenen Versuche hatten den Zweck, das Verhalten des abgelenkten Strahles im offenen rechteckigen Krümmer auf Grund unserer theoretischen Betrachtungen zu beobachten und die bei seiner Ablenkung auftretenden Verluste mit denen im geschlossenen Krümmer zu vergleichen. Als Leitlinien der Erzeugenden der Krümmeraußenflächen wurden einerseits Kreise, anderseits Kurven nach Gleichung (24) gewählt, so daß die erzielten Versuchsergebnisse gleichzeitig Unterlagen für die Beurteilung des relativen Gütegrades der Ablenkung der beiden Krümmerformen bilden. Der beschränkten örtlichen Wasserverhältnisse wegen (die Versuche wurden in der Küche des Zivilkriegsgefangenenlagers Douglas, Insel Man, England, von einem kleinen Kochkessel aus durchgeführt) konnten die Versuchskrümmern bloß mit verhältnismäßig kleinen Abmessungen konstruiert werden, so daß mit den Fehlerquellen der Druckhöhen- bzw. Wassermengenmessung die unten angegebenen Zahlenwerte keinen Anspruch auf absolute Richtigkeit machen können, wenngleich die unter den obwaltenden Umständen mögliche Sorgfalt auf die richtige Wertung der einzelnen Beobachtungen verwendet wurde. Da insbesondere die Versuchseinrichtung für den Kreiskrümmer dieselbe war wie für den Krümmer

nach Gleichung (24), ist jedenfalls der Unterschied in den Verlustwerten der beiden Krümmen als korrekt anzusehen¹⁾.

Die erste Versuchsreihe umfaßte die Beobachtung der Strömungserscheinungen und die Feststellung der Verlustwerte bei der Strömung im offenen Krümmer. Die Versuchseinrichtung, (Fig. 74) (schematisch) bestand aus einem Wasserbehälter A, der

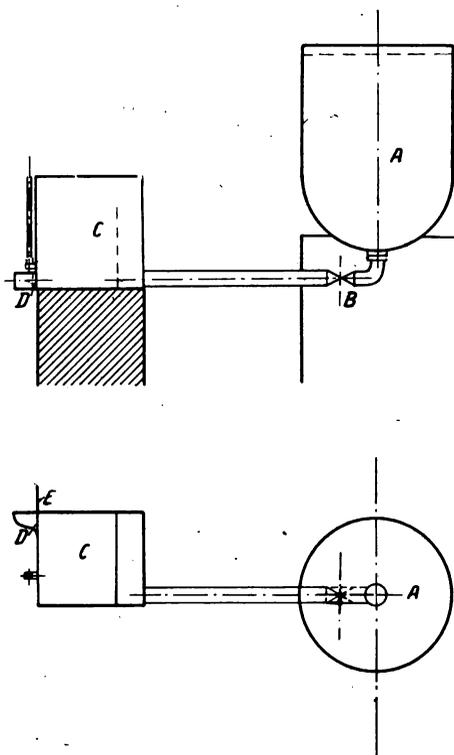


Fig. 74.

an die städtische Wasserleitung angeschlossen und über einen Regulierhahn B mit dem nach oben offenen Blechgefäße C (Fig. 75), verbunden war. In einer der Seitenflächen von C war

¹⁾ Verfasser wurde bei der Durchführung dieser Versuche durch die Herren Direktor Koehn und Ing. Kleckel, beide von den Mannesmann-Röhren-Werken, Düsseldorf, in dankenswerter Weise unterstützt.

eine rechteckige Ausflußöffnung D von $30 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ Querschnitt angebracht, deren Zuflußkanten gut abgerundet waren. Die Größe dieser Öffnung konnte bei gleichbleibender Höhe durch Verschiebung der Zunge E von 30 mm auf Null verändert werden.

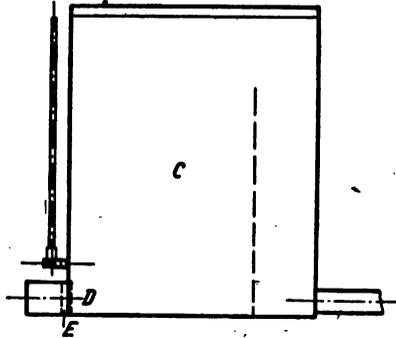


Fig. 75.

Die ersten Versuche galten der Feststellung des Geschwindigkeitsverlustes, der unter verschiedenen Druckhöhen h und verschiedener Größe der Seitenöffnung D beim Ausfließen auftrat. Dieser Verlust fand sich angenähert konstant zu $\xi = 0,03 \omega_0 = 0,03 \sqrt{2 g h}$. Dabei wurden die Druckhöhen mittels Standrohres, die Wassermengen mittels geeichten Auffanggefäßes und Stoppuhr gemessen.

Hierauf wurde an die Öffnung D ein nach Gleichung (24) gekrümmtes Leitblech für Ablenkung um 90° und oben und unten je ein glattes Blech mit möglichst glattem Übergange an die Ausflußkanten angelötet, so daß ein rechteckiger Krümmer entstand, der an der Innenseite offen war und dessen Weite bzw. dessen Krümmungsverhältnis $\frac{D}{R_m}$ durch Verschiebung der Zunge E beliebig verändert werden konnte. Die Versuche wurden mit zwei verschiedenen Druckhöhen h , $h_1 = 100 \text{ mm}$; $h_2 = 150 \text{ mm}$, und mit Krümmerweiten durchgeführt, die von 30 mm in Intervallen von 5 mm bis auf 5 mm Lichtweite abnahmen. Die sich daraus ergebende Änderung des Krümmungsverhältnisses $\frac{D}{R_m}$ wurde berechnet. Die Ausflußmenge wurde durch Zeitmessung bestimmt und aus ihr die tatsächlich für die Beschleunigung des Ausfluß-

wassers zur Verfügung stehende Druckhöhe $h' = \frac{w_0'^2}{2g}$ berechnet. Die Differenz dieser Druckhöhe und der am Standrohre des Ausflußgefäßes abgelesenen theoretischen Druckhöhe, (als solche ist, wegen der Kleinheit der Seitenöffnung, der Abstand des Gefäßwasserspiegels von der Mitte der Ausflußöffnung anzusehen),

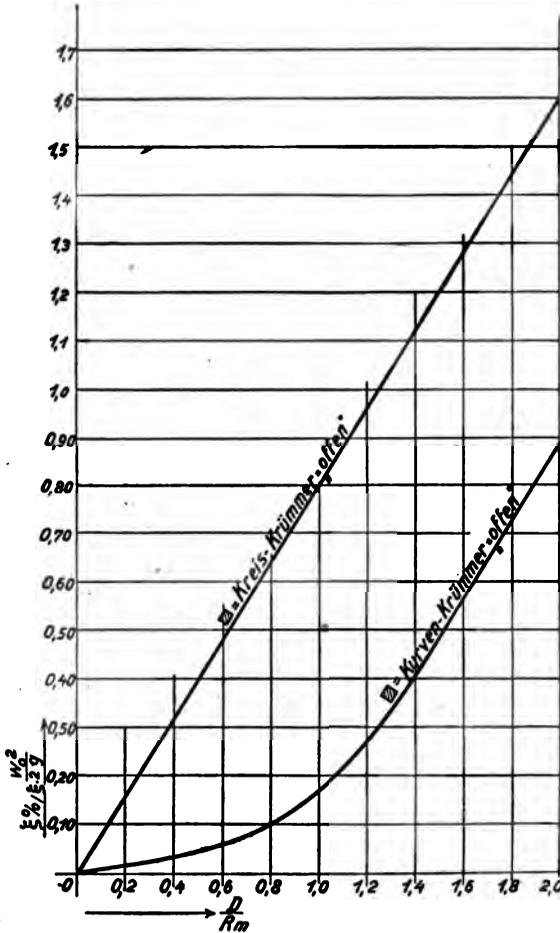


Fig. 76.

ergab den gesamten Ausfluß- und Krümmerverlust der in Prozenten der tatsächlich wirksamen Druckhöhe h' (Geschwindigkeitshöhe) ausgedrückt wurde. Nach Abzug des Ausflußverlustes,

der sich aus

$$\xi' = (1 - 0,97^2) \frac{w_0'^2}{2g} = 0,06 \frac{w_0'^2}{2g},$$

berechnet, ergibt sich der Krümmerverlust. Dieser wieder scheidet sich in den Wandreibungsverlust, der sich analog wie in geraden Rohren bestimmt, und in den Ablenkungsverlust. Die Resultate der Beobachtungen sind in Fig. 76 als Kurven eingetragen.

In die gleiche Figur sind die Kurven eingezeichnet, welche den unter ganz analogen Verhältnissen bestimmten Verlustwerten für den offenen Kreiskrümmen entsprechen.

Der Vergleich der beiden Versuchsergebnisse hinsichtlich des Ablenkungsverlustes zeigt die ausgesprochene Überlegenheit des Krümmers nach Gleichung (24) über den Kreiskrümmen. Im Falle des günstigsten Krümmungsverhältnisses $\frac{D}{R_m} = 0,4$ beträgt der Verlust des ersteren bloß etwa $0,03 \frac{w_0'^2}{2g}$ gegen etwa $0,30 \frac{w_0'^2}{2g}$ des letzteren, im ungünstigsten Falle $\frac{D}{R_m} = 2$, der des ersteren etwa $0,90 \frac{w_0'^2}{2g}$ gegen etwa $1,60 \frac{w_0'^2}{2g}$ des letzteren. Der Rohrreibungsverlust ist im Krümmen nach Gleichung (24) wegen der größeren mittleren Weglänge der Strömung um ein geringes größer als im Kreiskrümmen, doch wird der totale Gütegrad hierdurch nur in geringem Maße beeinflusst.

Die Strömung in der Krümmung selbst zeigte deutlich eine geringe Anschwellung des Strahles im Falle des Krümmers nach Gleichung (24) gegenüber einer Einschnürung im Falle des Kreiskrümmers. Bei letzterem wurde allerdings die sich bildende Hohlkehle verstärkt durch die von den energischeren Stromelementen seitlich abgedrängten Flüssigkeitsteilchen.

Der Abfluß aus dem Krümmen erfolgt in allen Fällen mit Neigung gegen die Krümmenaußenkante. Bei den Krümmern nach Gleichung (24) war die Größe des Neigungswinkels nur gering (α_m^0 etwa gleich 5°), während sich beim Kreiskrümmen Winkel von α_m^0 , etwa gleich 10° bis 30° , einstellten. (Der letztere Wert entspricht dem ungünstigsten Krümmungsverhältnisse $\frac{D}{R_m} = 2$). Das »Kreuzen« der Stromelemente und ihre spiralartige Bewegung konnte bei der relativ geringen Strömungsgeschwindigkeit gut beobachtet werden.

Die zweite Versuchsreihe umfaßte die Feststellung der Verlustwerte im geschlossenen Krümmer nach Gleichung (24) und deren Vergleich mit den von Weisbach¹⁾ gewonnenen Versuchsergebnissen an Kreiskrümmern rechteckigen Querschnittes bzw. mit denjenigen, die sich aus den Versuchen mit offenen Krümmern ergaben. Die Versuchseinrichtung bestand hier, wie Fig. 77 dies erkennen läßt, aus dem Wasserkessel *A*, an den sich hinter dem

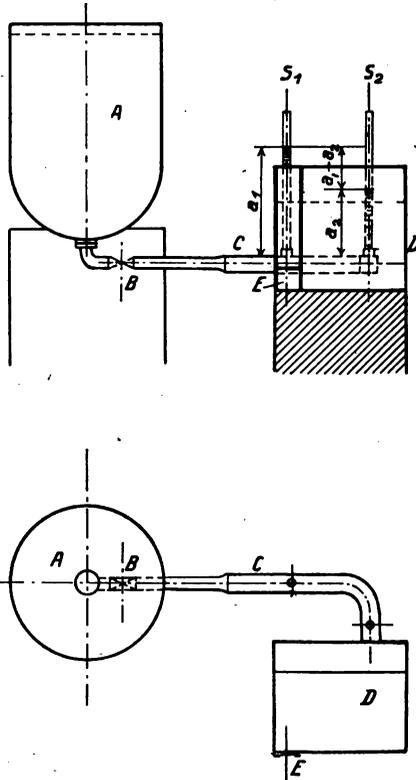


Fig. 77.

Regulierhahn *B* ein Verbindungsrohr *C* anschloß, in welchem der Kreisquerschnitt in den quadratischen ($40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$) übergang und das mit einer Krümmung von 90° in das Blechgefäß *D* mündete. Das letztere war mit einer gut abgerundeten quadrati-

¹⁾ Weisbach, siehe Hütte 1911, I. Band, S. 300.

sehen Seitenöffnung (40 mm \times 40 mm) als Ausflußöffnung versehen, deren Höhe durch einen vertikalen Schieber beliebig verändert werden konnte. Zwecks Feststellung der Ausflußmengen wurde das Meßgefäß D zunächst für verschiedene Druckhöhen und Größen der Seitenöffnung durch Zeitmessung geeicht. Bei den Hauptversuchen wurden sodann die Wasserstände in den in einer Entfernung von 25 mm vom Krümmeranfang bzw. -ende angebrachten Standröhren abgelesen und aus der Spiegelhöhe im Meßgefäße bzw. aus der eingestellten Größe der Seitenöffnung die Durchflußgeschwindigkeit bzw. die Geschwindigkeitshöhe im Krümmer bestimmt. Die Differenz der Wasserstände $a_1 - a_2$ ergab dann, in Prozenten der Geschwindigkeitshöhe ausgedrückt, den Gesamtverlust zwischen den Rohrstellen s_1 und s_2 . Dieser scheidet sich wieder in den Rohrreibungsverlust und den Ablenkungsverlust, welcher ersterer sich nach den bekannten Ansätzen bestimmt, so daß sich schließlich der reine Ablenkungsverlust in Hundertsteln der Geschwindigkeitshöhe ergibt. Diese Versuche wurden an Krümmern mit den folgenden Krümmungsverhältnissen ausgeführt: $\frac{D}{R_m}$ 0,4; 1; 2. Die Resultate sind im Diagramm (Fig. 78) sowohl für die Krümmer nach Gleichung (24) wie für die Kreiskrümmer, letztere nach Weisbach, zusammengestellt.

Wenn wir zunächst die beiden Krümmerformen hinsichtlich des Ablenkungsverlustes untereinander vergleichen, ergibt sich, besonders bei schärferer Krümmung, eine noch bedeutendere Überlegenheit des Krümmers nach Gleichung (24) über den Kreiskrümmer, als dies bei den offenen Krümmern der Fall war. Für das günstigste Krümmungsverhältnis $\frac{D}{R_m} = 0,4$ ist der Verlust $0,033 \frac{\omega_0^2}{2g}$ im Krümmer nach Gleichung (24) gegenüber $0,135 \frac{\omega_0^2}{2g}$ im Kreiskrümmer, für das ungünstigste Krümmungsverhältnis $\frac{D}{R_m} = 2$, $0,62 \frac{\omega_0^2}{2g}$ gegenüber $3,25 \frac{\omega_0^2}{2g}$.

Beim Vergleiche der offenen mit den geschlossenen Krümmern gleicher Art zeigt sich, daß für die Krümmer nach Gleichung (24) kaum ein Unterschied in den Verlustwerten auftritt, solange $\frac{D}{R_m} \leq 1$ ist. Die Kreiskrümmer zeigen zunächst bei kleinen Krümmungsverhältnissen eine Verbesserung des Wirkungsgrades der Ab-

lenkung, die aber bei größer werdendem $\frac{D}{R_m}$ verschwindet, so daß sich bei schärferer Krümmung eine beträchtliche Vermehrung der Ablenkungsverluste im geschlossenen Krümmer gegenüber denen im offenen Krümmer ergibt. Die Erklärung für dieses Verhalten

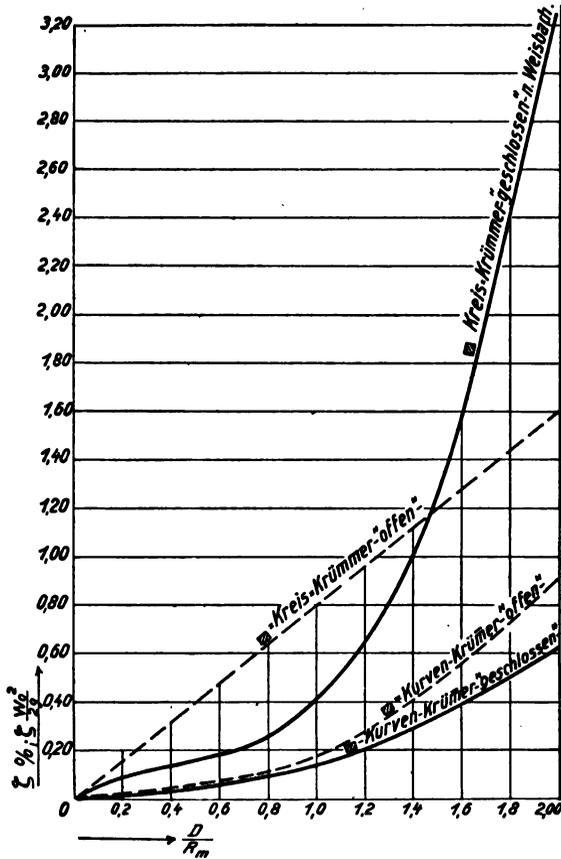


Fig. 78.

liegt darin, daß einerseits bei geringen Werten von $\frac{D}{R_m}$ im geschlossenen Krümmer nicht so viele seitlich verdrängte Stromelemente ihre Geschwindigkeitsenergie einbüßen wie im offenen Krümmer, daß andererseits bei größeren Werten von $\frac{D}{R_m}$ bzw. der

hierdurch bedingten Vergrößerung der Einschnürungszahl α' an der Innenseite des geschlossenen Kreiskrümmers diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen (Rückströmung, Kavitationserscheinungen usw.) auftreten, die im Falle des mit der Atmosphäre verbundenen offenen Krümmers sich nicht einstellen können.

Aus den Versuchen ist zu ersehen, daß durch die Verwendung der neuen Krümmerformen nach Gleichung (24) anstelle der üblichen Kreiskrümmers in der Industrie, namentlich aber in Druckrohrleitungen von Wasserkraftanlagen, in den Wasserleitungs- und Kanalisationsnetzen der Großstädte usw. ohne Aufwand von Mehrkosten große ökonomische Vorteile erzielt werden können.

V. Abschnitt.

Der hydraulische Stoß.

Unter dem Begriffe des hydraulischen Stoßes sind nach der gebräuchlichen Bezeichnungsweise alle jene Vorgänge verstanden, die bei plötzlicher Umlenkung eines Strahles an einer ebenen oder gekrümmten Fläche bzw. bei plötzlicher Querschnittsänderung oder beim Zusammentreffen zweier oder mehrerer Strahlen von verschiedener Richtung oder — und — verschiedener Geschwindigkeit auftreten.

Mit dem in der Mechanik fester Körper definierten Stoße haben diese Vorgänge bloß gemein, daß sie als Ergebnis der Einwirkung auf das Flüssigkeitselement einer sehr (unendlich) großen Kraft in sehr (unendlich) kurzer Zeit entstehen. Beim Stoß fester Körper handelt es sich indessen im allgemeinen um diskontinuierliche Bewegungen, bei denen zwei oder mehrere Massen mit endlichen Relativgeschwindigkeiten aufeinanderstoßen. Unter dem Einfluß der Stoßkräfte erleiden dieselben Änderungen ihres molekularen Zusammenhanges vorübergehender oder bleibender Art, je nachdem die zur Wirkung gelangenden Körper vollkommen elastisch, unvollkommen elastisch oder unelastisch sind. Beim hydraulischen Stoß kann, soweit die reibungsfreie Flüssigkeit in Betracht kommt, eine ähnliche Wirkung nicht auftreten. Die Verzögerung bzw. Beschleunigung der Flüssigkeits-Moleküle erfolgt wegen der unendlich großen Beweglichkeit derselben auch in einer sehr kleinen Verzögerungs- bzw. Beschleunigungsdauer stetig, so daß wir es hier gar nicht mit diskontinuierlichen Bewegungen zu tun haben. Die geänderte Energie des Flüssigkeitselementes veranlaßt hierbei jene Änderungen der Form, des Zustandes und der (stetigen) Bewegung des Elementes in dem es umgebenden Raume, wie sie den allgemeinen hydrodynamischen Grundgleichungen entsprechen.

Man könnte sich als Analogon folgendes vorstellen: Ein starrer Körper bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit senkrecht zur Erdoberfläche aufwärts ohne irgend einer verzögernden Wirkung (Schwerkraft, Magnetismus usw.) unterworfen zu sein. Eine solche Wirkung trete nun plötzlich und mit großer Stärke auf, so daß der Körper, den wir uns auch als Flüssigkeitselement vorstellen können, plötzlich eine sehr starke Verzögerung erleidet bzw. zum Stillstande gebracht wird. Da seine sämtlichen materiellen Punkte gleichzeitig und gleichartig von der verzögernden Kraft beeinflußt werden, liegt zur Störung des molekularen Zusammenhanges (Deformation) kein Grund vor, es sei denn, daß eine Einwirkung der durch die Energieänderung hervorgerufenen Erhöhung des inneren Arbeitsvermögens (Auftreten des Gewichtes gegenüber dem früher gewichtslosen Zustande des Körpers usw.) auf die Umgebung stattfindet.

Wenn wir es also mit idealen, d. h. reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeiten zu tun haben, sind die beim hydraulischen Stoß auftretenden inneren Vorgänge bloß auf Verwandlung kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt bzw. auf stetige Richtungsänderungen der Strombahnen der einzelnen Elemente beschränkt. Sind die betrachteten Flüssigkeiten reibungs- bzw. wirbelbehaftet, so veranlassen die mit Reibung und Wirbelung verbundenen Energieverluste des Elementes, namentlich in den Grenzschichten der Strömung, Sekundärbewegungen, die den Verlauf der theoretischen (verlustlosen) Hauptströmung in größerem oder geringerem Maße zu beeinflussen vermögen, wobei der zu ihrer Entstehung bzw. Aufrechterhaltung aufgewendete Energieanteil als »hydraulischer Stoßverlust« bezeichnet wird. Doch ist dieser Verlust mit dem beim Stoße fester Körper auftretenden Energieverluste nicht identisch.

Wir betrachten zunächst die Ablenkung eines freien Strahles von kreisförmigem Querschnitte an einer senkrecht zur Strahlachse stehenden, ebenen, ruhenden Wand von unendlicher Ausdehnung. Die mit der über den Strahl-Querschnitt gleichförmigen Geschwindigkeit

$$w = w_0 = w_z = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

in der Richtung der Strahlachse zuströmenden Flüssigkeitselemente werden stetig und nach allen Seiten hin gleichförmig in die horizontale Wandebene abgelenkt. Wenn wir von der Wandreibung

vorläufig absehen, können wir die Strömung des freien Strahles als angenähert reibungs- und wirbelfrei betrachten und erhalten dann bei Fortfall aller Sekundärbewegungen als Bild der Strömung eine Verzögerung der Geschwindigkeit in der z -Richtung, verbunden mit einer gleichzeitigen und gleich großen Beschleunigung in der r -Richtung derart, daß in der Aufteilung des Energieinhaltes der einzelnen Flüssigkeitselemente keinerlei Veränderung eintritt. Da somit die Absolutgeschwindigkeit der nach allen Seiten hin abströmenden Flüssigkeitselemente unverändert bleibt, gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\pi \cdot r_0^2 \cdot \omega_0 = 2 \pi \cdot r_0 \cdot z_0 \cdot \omega_{r m_0} \dots \dots \dots (2)$$

wobei $\omega_{r m_0}$ die mittlere Radialgeschwindigkeit im Abstände r_0 von der Strahlachse bedeutet. Daraus ergibt sich die Höhe z_0 der abströmenden Flüssigkeitsmenge im Radius r_0 zu

$$z_0 = \frac{r_0}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_{r m_0}} \dots \dots \dots (3)$$

In ihrem weiteren Verlaufe folgt die Strömung der Kontinuitätsbedingung

$$2 \pi \cdot r \cdot z \cdot \omega_{r m} = \text{konstant} \dots \dots \dots (4)$$

wobei $\omega_{r m}$ (siehe Fig. 79) eine Funktion des Tangentenwinkels

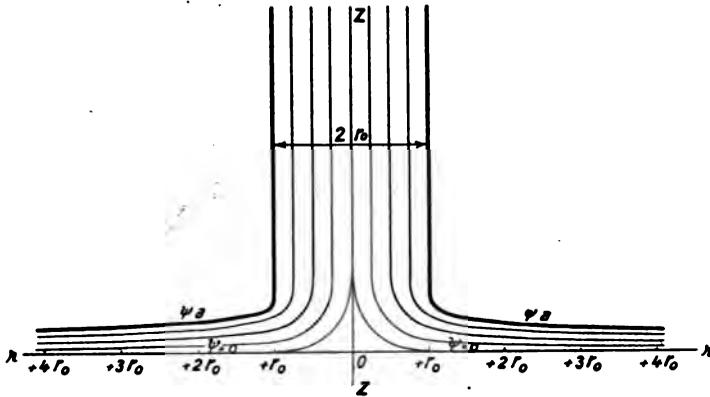


Fig. 79.

der oberen Stromgrenzkurve in dem betrachteten Ringquerschnitte ist:

$$\omega_{r m} = f_1(\varphi) \cdot \omega_0 = f_1\left(\arctg \frac{dz}{dr}\right) \cdot \omega_0 \dots \dots (5)$$

Damit geht Gleichung (4) über in

$$r \cdot z \cdot f_1 \left(\operatorname{arctg} \frac{dz}{dr} \right) = \text{konstant} \quad \dots \quad (6)$$

Die aus Gleichung (6) sich ergebende Stromfunktion

$$\psi = \psi(r, z) \quad \dots \quad (7)$$

muß den Bedingungen genügen:

$$\left. \begin{aligned} \omega_z \cdot r &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \omega_r \cdot r &= -\frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \quad (8)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} = r^2 \cdot \omega_0^2 \quad \dots \quad (9)$$

$$\frac{\partial (\omega_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial (\omega_z \cdot r)}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad (10)$$

Die Absolutgeschwindigkeit ω_0 der Elemente bleibt dabei in allen Punkten der Strömung konstant, wird aber bei reibungs- bzw. wirbelbehafteter Strömung allmählich geringer, bis sich bei genügender Größe der Ablenkungsfläche die geordnete Strömung unter Bildung einer ringförmigen Brandungswelle auflöst.

Für diesen verzögerten Strömungsverlauf der Strömung mit Wandreibung lassen sich folgende Beziehungen aufstellen: Da die Strömung im allgemeinen turbulent verläuft, gilt für den spezifischen Druckhöhenverlust durch Reibung an der ablenkenden Wand der Ansatz

$$h_w = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\omega_{rm}^2}{2g} \cdot \frac{U}{F} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\omega_{rm}^2}{2g} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{2\pi \cdot r \cdot z} \quad \dots \quad (11)$$

Dieser Druckhöhenverlust muß nun ähnlich wie bei der Strömung im offenen Kanal usw. im Gleichgewichtszustande gleich sein dem Spiegelgefälle. Wir erhalten demnach

$$h_w = \frac{dz}{dr} = \frac{\mu}{2z} \cdot \frac{\omega_{rm}^2}{2g} \quad \dots \quad (12)$$

Mit dem aus Gleichung (4) bestimmten Werte für ω_{rm} ergibt Gleichung (12)

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{k_0}{2g \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot z^3} \quad \dots \quad (13)$$

Nach Ausführung der Integration nach r und z folgt die Be-

ziehung

$$r \cdot z^4 = \text{konstant} \dots \dots \dots (14)$$

welche in der Form

$$\psi = A \cdot r \cdot z^4 \dots \dots \dots (15)$$

gleichzeitig die Gleichung für die Stromfunktion der betrachteten Strömung ist. Fig. 80 zeigt den Verlauf der oberen Grenzkurve,

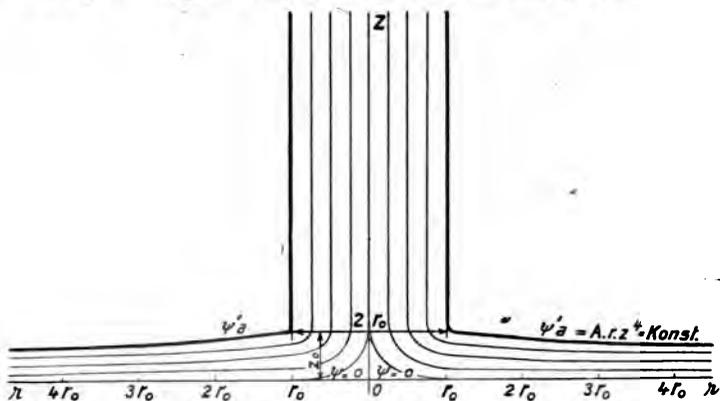


Fig. 80.

die ohne Bildung einer merkbaren Hohlkehle in den freien Strahl übergeht, wie dies auch die Erfahrung bestätigt¹⁾. Die Geschwindigkeitskomponenten bestimmen sich aus der Gleichung (15) zu

$$\left. \begin{aligned} w_z &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = A \frac{z^4}{r} \\ w_r &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = -A z^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Die Ansätze (16) genügen der Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial (w_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial (w_z \cdot z)}{\partial z} = 0.$$

Das Durchflußvolumen ergibt sich aus

$$V = 2 \pi \cdot \psi_a = 2 \pi \cdot A \cdot r_0 \cdot z_0^4 \dots \dots \dots (17)$$

und daraus die mittlere Durchflußgeschwindigkeit $w_{r,m}$ zu

$$w_{r,m} = \frac{V}{F} = \frac{2 \pi A \cdot r_0 \cdot z_0^4}{2 \pi r_0 \cdot z_0} = A z_0^3 \dots \dots \dots (18)$$

¹⁾ Siehe Hütte, I. Band, 21. Aufl., 1911, S. 318.

Der bei der Ablenkung auf die ablenkende Fläche ausgeübte Druck ist gleich

$$P = M (\omega_0 - \omega_{zm}) = \frac{\gamma}{g} \cdot \pi r_0^2 \omega_0 (\omega_0 - \omega_{zm}) \quad (19)$$

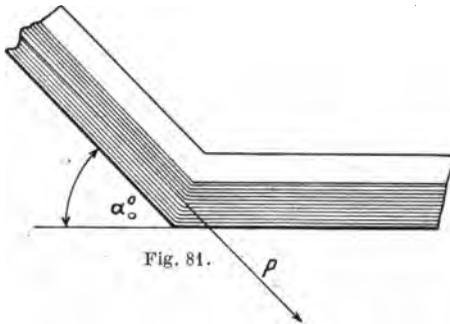
wobei M die in der Zeiteinheit abgelenkte Flüssigkeitsmasse in kg/m^{-1} bedeutet. Für $r = \infty$ wird, gemäß Gleichung (16), $\omega_{zm} = 0$ und wir erhalten, mit F_0 als Strahlquerschnitt,

$$P_\infty = \gamma \cdot 2 \pi \cdot r_0^2 \frac{\omega_0^2}{2g} = 2 F_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} \quad (19a)$$

Hat die ablenkende Fläche Kreisform von endlicher Ausdehnung, so wird der Druck P gemäß Gleichung (19) bzw. (16) entsprechend kleiner. Doch ist für $r = 3 \cdot r_0$ der Unterschied gegenüber dem durch Gleichung (19a) gegebenen Werte praktisch zu vernachlässigen. Für $r = r_0 \cdot \sqrt{2}$, ($F = 2F_0$), wird $P = 0,75 P_\infty$, für $r = r_0$, ($F = F_0$), $P = 0,50 P_\infty$.

Ist der Strahl gegen die Ablenkungsebene geneigt, so haben wir verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. Der Strahl sei, wie das bei technischen Problemen meist vorkommt, von rechteckigem Querschnitte und werde an einer unter dem Winkel α_0 gegen die Strahlachse geneigten, kanalartig begrenzten Ebene abgelenkt. Findet dabei der Ausfluß nur nach einer Richtung statt (Fig. 81), so gilt für den in der Strahlrichtung

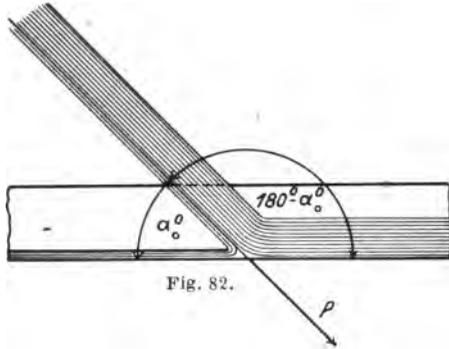


auftretenden Druck auf die Kanalwand die Beziehung

$$P = \gamma \cdot 2 \cdot F_0 \frac{\omega_0^2}{2g} (1 - \cos \alpha_0) \quad (20)$$

2. Der Strahl und die Ablenkungsfläche seien zueinander geneigt wie unter 1., der Abfluß findet jedoch nach zwei entgegen-

gesetzten Richtungen statt. (Fig. 82.) Hier wird ein Teil des auftreffenden Strahles um den Winkel α_0 , ein zweiter Teil um den Winkel $(180 - \alpha_0)$ abgelenkt. Da sich die Horizontalkompo-



nenten der Ablenkungsdrücke beider Strahlteile im Beharrungszustande das Gleichgewicht halten müssen, gilt die Beziehung

$$P_h = M_1 \cdot \omega_0 (1 - \cos \alpha_0) = M_2 \cdot \omega_0 (1 + \cos \alpha_0) \quad (21)$$

wobei M_1 und M_2 die nach rechts bzw. links abfließenden Teilmassen der pro Sekunde abgelenkten Strahlmasse bedeuten. Es ist

$$M_1 + M_2 = M \quad (22)$$

Aus Gleichung (21) folgt:

$$M_1 = M \cdot \frac{1 + \cos \alpha_0}{1 - \cos \alpha_0} \quad (21a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{2} \cdot (1 + \cos \alpha_0) \\ M_2 &= \frac{M}{2} (1 - \cos \alpha_0) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

zur Berechnung der nach rechts und links abgelenkten Teilmassen des Strahles. Damit wird der gesamte Ablenkungsdruck in der Strahlrichtung

$$\begin{aligned} P &= M_2 \cdot \omega_0 (1 + \cos \alpha_0) + M_1 \omega_0 (1 - \cos \alpha_0) = M \cdot \omega_0 \cdot \sin^2 \alpha_0 = \\ &= \gamma \cdot 2 \cdot F_0 \frac{\omega_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha_0 \quad (24) \end{aligned}$$

3. Der Strahl habe kreisförmigen Querschnitt und seine Achse sei gegen die ablenkende, unbegrenzte Fläche unter dem Winkel

α_0 geneigt. Es erfolgt, analog wie beim senkrecht abgelenkten freien Strahle, radialer Abfluß nach allen Richtungen. Dabei ist der Ablenkungswinkel längs des Strahlumfanges zwischen α_0 und $(180 - \alpha_0)$ veränderlich. (Fig. 83.) Die Gleichgewichtsbedingung

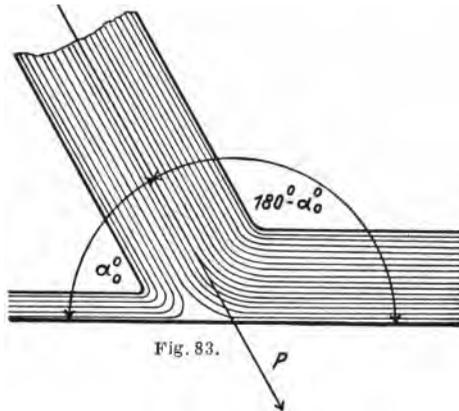


Fig. 83.

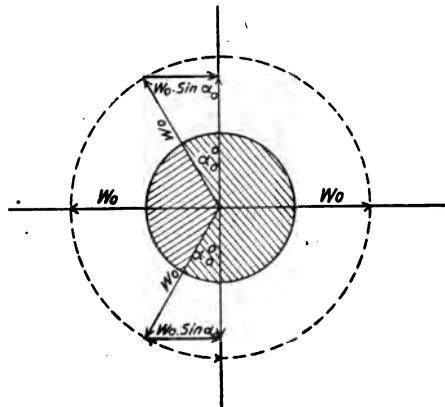


Fig. 84.

für den Beharrungszustand der Strömung besteht wie beim rechteckigen Kanalstrahl unter 2. Die Bestimmung der nach rechts und links abfließenden Teile der Strahlmasse geschieht wie folgt: Jedes auf die ablenkende Fläche auftreffende Strahlelement wird wegen der symmetrischen Verteilung der Ablenkungsdrücke zunächst radial abgelenkt, und zwar mit einer Richtungskomponente, die der Größe von ω_0 proportional ist. Nun haben aber

die zuströmenden Strahlelemente auch eine Richtungskomponente, die proportional ist der Größe $\omega_0 \cdot \cos \alpha_0$. Durch Bildung des Richtungsparallelogrammes bestimmt sich nach Fig. 84 jener Abschnitt des Strahles, dessen Masse nach rechts, sowie jener, dessen Masse nach links abgelenkt wird. Aus der Figur ergibt sich die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \left(1 - \frac{\alpha_0^0}{180^0}\right) \cdot M \\ M_2 &= \frac{\alpha_0^0}{180} \cdot M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Daraus der Ablenkungsdruck in der Richtung der Strahlachse

$$\begin{aligned} P &= M_1 \omega_0 (1 - \cos \alpha_0) + M_2 \cdot \omega_0 (1 + \cos \alpha_0) = \\ &= M \cdot \omega_0 \left\{1 - \left(1 - \frac{\alpha_0^0}{90_0}\right) \cos \alpha_0\right\} = \\ &= \gamma \cdot 2 F_0 \frac{\omega_0^2}{2g} \left\{1 - \left(1 - \frac{\alpha_0^0}{90^0}\right) \cos \alpha_0\right\} \dots (26) \end{aligned}$$

Die nach Gleichung (26) berechneten Drücke sind für variable

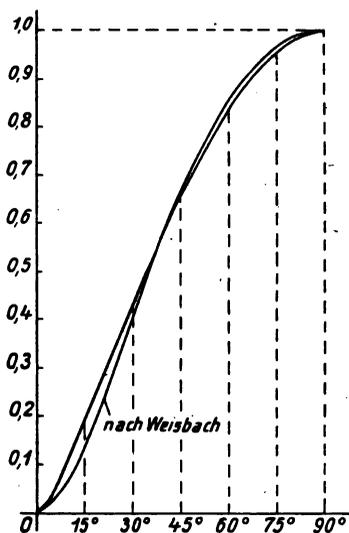


Fig. 85.

α_0 in Fig. 85 eingetragen. Sie stimmen mit den von Weisbach¹⁾ empirisch bestimmten Werten in befriedigender Weise überein. Im übrigen verläuft die Strömung in allen drei Fällen analog der oben bei der Ablenkung des senkrechten freien Strahles behandelten Flüssigkeitsbewegung. Im Falle 2. und 3. wird wegen der nach der Seite des größeren Ablenkungswinkels ($180 - \alpha_0$) geringeren abströmenden Flüssigkeitsmenge, bzw. wegen der geringeren Höhe z der abströmenden Stromschicht das Spiegelgefälle auf dieser Seite des Strahles durch die Wirkung der Wandreibung eher

aufgezehrt als auf der entgegengesetzten Seite, so daß die Brandungswelle auf der ersteren viel näher der Strahlachse

¹⁾ Siehe Hütte, 21. Aufl., 1911, I. Band, S. 320.

auftritt bzw. die Länge der abgelenkten Strahlen kleiner wird als in der Richtung des kleineren Ablenkungswinkels α_0 .

Ist die ablenkende Wand nicht, wie wir angenommen haben, horizontal, sondern eine beliebige, ebene oder gekrümmte Fläche, so ist in unseren Gleichungen noch der Einfluß der Schwerkraft- bzw. Fliehkraftkomponenten auf die Flüssigkeitsbewegung zu berücksichtigen.

Der Übergang aus der Zuflußrichtung des Strahles in die der ablenkenden Ebene erfolgt nach Versuchen des Verfassers u. a. nicht in der unstetigen Weise bzw. in zwei Phasen, wie oben beschrieben, sondern stetig, wie bei der Strömung im Krümmer, wobei sich anstelle der ablenkenden Krümmereußenwand ein an der Hauptströmung nicht teilnehmender feststehender bzw. wirbelnder Wasserkern bildet, an dessen trichterförmiger Mantelfläche die Hauptströmung entlang fließt. Diese als »Staukegel« bezeichnete Erscheinung beeinflusst indessen die von uns abgeleitete Strömungsform nur unwesentlich. Die Strömung in der Krümmung folgt den von uns im Abschnitt IV abgeleiteten Gesetzen. Es liegt in der Natur der Strömung, als der eines freien Strahles, daß sich die erwähnte Mantelfläche des die äußere Begrenzung der Hauptströmung bildenden Kerns nach einer, der Gleichung (24) des IV. Abschnittes analogen Beziehung einstellt, die dem Unterschiede Rechnung zu tragen hat, der hier in der Veränderung des Durchflußquerschnitts bei der Ablenkung besteht. (Fig. 86.)

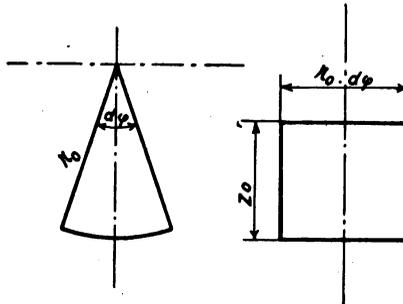


Fig. 86.

Wenn wir annehmen, daß die Ablenkung längs der Kernmantelfläche gerade in der Entfernung r_0 von der Achse des Strahles beendet ist, so gilt mit $\nu = \frac{\pi}{2}$ folgende Beziehung für die Feststel-

lung des Strahlquerschnittes, in welchem die Ablenkung beginnt bzw. für die Berechnung der Höhe z_0 des konoidartigen Kernes:

$$\frac{r_0^2}{2} d\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot r_0 \cdot d\varphi \cdot z_0 \dots \dots \dots (27)$$

Daraus

$$z_0 = \frac{2}{\pi} \cdot r_0 = 0,636 r_0 \dots \dots \dots (28)$$

in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die im Kerne enthaltene Flüssigkeitsmasse wird, ähnlich wie beim Ausflusse aus scharfkantigen Bodenöffnungen, unter Voraussetzung reibungs- und wirbelbehafteter Strömung, Wirbel- und Rotationsgeschwindigkeitskomponenten annehmen. Dem Verfasser gelang es, durch Einführen kleiner Aluminiumfähnchen in den Staukegel das Auftreten dieser Rotation und ihre Proportionalität mit der Hauptstromgeschwindigkeit nachzuweisen bzw. die ungefähren Grenzen des wirbelnden Kernes festzustellen. In diesen Grenzschichten wird unter dem Einflusse der inneren Reibung ein (geringer) Teil der Kernelemente durch die Hauptströmung mitgerissen, so daß im Staukegel neben der Rotation auch eine geringe Axial- bzw. Radialbewegung auftritt.

In bezug auf die Lage des Druckmittelpunktes des Strahles auf der ablenkenden Ebene ist folgendes zu bemerken:

Bei allen senkrecht ($\alpha = 90^\circ$) abgelenkten Strahlen sind der Druckmittelpunkt und der Schnittpunkt der Strahlachse mit der ablenkenden Ebene identisch. Das gleiche gilt für die Ablenkung unter einem Winkel $\alpha \geq 90^\circ$, sofern wir die abgelenkte Flüssigkeit als ideal (reibungsfrei) bezeichnen können. Bei zähen Flüssigkeiten hingegen tritt in diesem Falle wegen der ungleich langen Wege, welche die längs des unsymmetrischen Staukegels abfließenden Stromelemente bei ihrer Ablenkung zurückzulegen haben, eine ungleiche Verzögerung auf der Seite des größeren und kleineren Neigungswinkels auf, wobei diese, durch die Reibung verursachte Verzögerung auf der Seite des kleineren Ablenkungswinkels größer ist als auf der des größeren. Um das hierdurch gestörte Gleichgewicht der Horizontalkomponenten der Ablenkungsdrücke wieder herzustellen, rückt der Druckmittelpunkt selbsttätig aus der Mittellage nach der Seite des größeren Ablenkungswinkels ab. Dieses aus Widerstandsversuchen an Tragflächen in bewegter Luft empirisch gefundene Abrücken des

Druckmittelpunktes (Avanzinisches Gesetz) ist demnach in erster Linie von der Größe der äußeren und inneren Reibung und dem Fließzustande der abgelenkten Flüssigkeit abhängig. Es wächst natürlich mit kleiner werdendem Ablenkungswinkel wegen der hierbei auftretenden größeren Unterschiede der bei der Ablenkung zurückzulegenden Wegstrecken der Stromelemente. Mit dieser Veränderung der Lage des Druckmittelpunktes ist aber auch eine Änderung in der Richtung des resultierenden Ablenkungsdruckes verbunden, welche, schon mit Rücksicht auf eine etwaige Rotation im Staukegel, angenähert senkrecht zur ablenkenden Ebene gerichtet sein wird. Sehr schön zeigen diese Vorgänge die photographischen Aufnahmen, wie sie u. a. Hele-Shaw¹⁾ und Ahlborn²⁾ von ähnlichen Strömungen gemacht haben.

Für die bisher betrachteten Strömungen ist wegen Stillstandes der Ablenkungsfläche die Leistung des abgelenkten Strahles gleich 0. Hat jedoch die Fläche eine Geschwindigkeit c in der Richtung der Strahlachse, so berechnet sich die Leistung aus

$$L = P \cdot c \dots \dots \dots (29)$$

wobei für den Druck P die Beziehung besteht

$$P = M \cdot (\omega_0 - c) = \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot \omega_0 (\omega_0 - c) \dots \dots (30)$$

Mithin wird

$$L = \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot \omega_0 (\omega_0 - c) \cdot c \dots \dots \dots (29a)$$

Ist dabei die Ausflußmündung stillstehend, wie z. B. bei Wasserrädern, so gilt für die maximale, übertragbare Leistung, bei gegebener Strahlstärke und Strahlgeschwindigkeit und ohne Rücksicht auf den Einfluß der Wandreibung

$$c = \frac{\omega_0}{2} \dots \dots \dots (31)$$

bzw.

$$L_{\max} = 0,5 \cdot \gamma \cdot F_0 \omega_0 \cdot h \dots \dots \dots (29b)$$

Ist die Fläche halbkugelförmig ausgehöhlt, so geht mit $\alpha_0 = 180^\circ$

¹⁾ Hele-Shaw, The distribution of pressure due to flow round submerged surfaces, Proc. Institution of naval Architects, 1900.

²⁾ F. Ahlborn, Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes, Hamburg 1902.

Gleichung (20) über in

$$P_{180^\circ} = 4 F_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} = 2 \cdot P_{90^\circ} \dots \dots \dots (22a)$$

und die maximale Leistung des Strahles bei einer solchen, z. B. in der Schaufel des Peltonrades, angenähert durchgeführten Ablenkung, ohne Rücksicht auf die Verluste der Wandreibung, ergibt sich wegen Gleichung (31) zu

$$L_{\max} = F_0 \cdot \gamma \cdot h \cdot \omega_0 \dots \dots \dots (32)$$

Der Strömung bei plötzlicher Ablenkung eines Strahles an einer ebenen oder gekrümmten Fläche ähnlich ist die Flüssigkeitsbewegung bei plötzlicher Querschnittserweiterung bzw. -Verengung.

Im Falle der plötzlichen Querschnittserweiterung (Fig. 87) findet die Ablenkung beim Auftreffen der mit einer mittleren Ge-

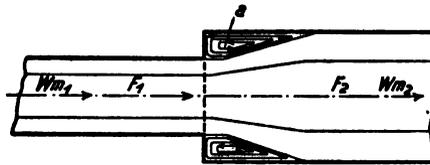


Fig. 87.

schwindigkeit ω_{m1} durch den Querschnitt F_1 strömenden Flüssigkeitselemente auf die im erweiterten Querschnitte F_2 unter dem Einflusse irgend einer äußeren oder Oberflächenkraft auf die mittlere Geschwindigkeit ω_{m2} verzögerten Flüssigkeitselemente statt. Wir haben für die Aufstellung der Energiegleichung folgendes zu beachten:

Der Energieinhalt der durch den Querschnitt F_1 zuströmenden Elemente ist gemäß der dritten der hydrodynamischen Grundgleichungen für Parallelströmung gegeben durch den Energiesatz

$$\frac{\omega_{m1}^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \text{konst.} \dots \dots \dots (33)$$

Der Energieinhalt der durch F_2 abströmenden Flüssigkeitselemente ist gegeben durch die ähnliche Beziehung

$$\frac{\omega_{m2}^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \text{konst.} \dots \dots \dots (34)$$

Der auftretende Energieverlust findet sich durch Subtraktion der Gleichungen (33) und (34) zu

$$E = h_w(SU) = \left(\frac{\omega_{m1}^2}{2g} - \frac{\omega_{m2}^2}{2g} \right) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + (z_1 - z_2) \quad (35)$$

Da bei horizontalem Rohre $z_1 = z_2$ ist, lautet Gleichung (35) hierfür

$$E = h_w(SU) = \frac{\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2}{2g} + \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right) \dots (35a)$$

Denken wir uns nun den Querschnitt F durch einen Kolben abgeschlossen, der in dem erweiterten Teile des Rohres reibungslos verschiebbar und derart belastet ist, daß er unter der Einwirkung des aus F_1 mit der Geschwindigkeit ω_{m1} zuströmenden Strahles die gleichförmige Geschwindigkeit ω_{m2} annimmt, so ist der Strömungsvorgang identisch mit demjenigen, der bei Ablenkung eines freien Strahles an einer zur Strahlachse senkrechten Wand auftritt. Für diesen ist, gemäß Gleichung (29a) und mit den Beziehungen der Fig. 83 die vom Strahle auf die Fläche übertragene Leistung

$$L = \gamma \cdot F_1 \omega_{m1} \frac{\omega_{m2} (\omega_{m1} - \omega_{m2})}{g} \dots (29c)$$

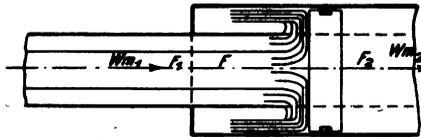


Fig. 88.

bzw., da $\gamma \cdot F_1 \omega_{m1}$ das pro Zeiteinheit zuströmende Flüssigkeitsgewicht bedeutet, die Leistung pro Gewichtseinheit.

$$L' = \frac{\omega_{m2} (\omega_{m1} - \omega_{m2})}{g} \dots (29d)$$

Der hierbei auftretende Energieverlust ist demnach gleich

$$E' = h_w(SU') = \frac{\omega_{m1}^2}{2g} - \left(\frac{\omega_{m2}^2}{2g} + L' \right) = \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2g} \quad (36)$$

Die Strömung bei Querschnittserweiterung ist nun offenbar wieder identisch mit der in Fig. 88 dargestellten, so daß der für letztere abgeleitete Energieverlust, Gleichung (36), mit dem durch

Gleichung (35a) bestimmten identisch ist. Wir erhalten

$$E' = h_w f_{St}' = \frac{\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2}{2g} - \frac{p_2 - p_1}{\gamma} =$$

$$= \frac{\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2}{2g} - \frac{\omega_{m2}(\omega_{m1} - \omega_{m2})}{g} = \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2g} \quad (37)$$

Aus dieser zuerst von Borda aufgestellten und experimentell bestätigten Beziehung geht hervor, daß die Flüssigkeitselemente beim plötzlichen Querschnittsübergang außer einer Geschwindigkeitsverminderung eine Drucksteigerung erfahren, deren Wert gleich ist der von den schneller strömenden auf die langsamer strömenden Elemente übertragenen Leistung:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{\omega_{m2}(\omega_{m1} - \omega_{m2})}{g} \quad \dots \dots \quad (38)$$

Mündet das im Querschnitte erweiterte Rohr in die Atmosphäre aus, so ist p_2 gleich dem Atmosphärendruck zu setzen und wir erhalten gemäß Gleichung (38) im Raume a Unterdruck, eine Erscheinung, die der Wirkungsweise der Strahlapparate usw. zugrunde liegt.

Der oben bestimmte Energieverlust dient, wie wir weiter unten noch näher sehen werden, zur Aufrechterhaltung der Sekundärströmungen im Raume a , welche den Druckausgleich zwischen der Grenzschichte des Strahles s und seiner Umgebung bewirken.

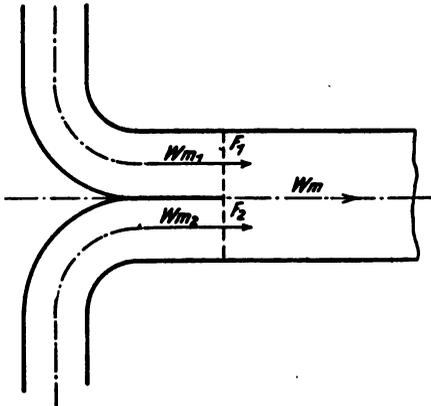


Fig. 89.

Beim Zusammentreffen zweier Strahlen von gleicher Stromrichtung, aber verschiedener Geschwindigkeit, ω_{m1} und ω_{m2} , treten Strömungen auf, die der bei plötzlicher Querschnittserweiterung vollkommen analog sind. (Fig. 89.) Für beide Strahlen, die nach ihrer Vereinigung mit der mittleren Geschwindigkeit ω_m weiterfließen, ist die Mischung

mit einer plötzlichen Geschwindigkeits bzw. Druckänderung verbunden, wobei sich der auftretende Verlust gemäß Gleichung (37)

berechnet zu

$$h_w^{(St_1)} = \gamma \cdot F_1 \omega_{m1} \frac{(\omega_{m1} - \omega_m)^2}{2g} \dots \dots \dots (39)$$

für den ersten Strahl, und zu

$$h_w^{(St_2)} = \gamma \cdot F_2 \omega_{m2} \frac{(\omega_{m2} - \omega_m)^2}{2g} \dots \dots \dots (40)$$

für den zweiten Strahl, bzw. der Gesamtverlust

$$h_w^{(St)} = \gamma \cdot \left\{ F_1 \omega_{m1} \frac{(\omega_{m1} - \omega_m)^2}{2g} + F_2 \omega_{m2} \cdot \frac{(\omega_{m2} - \omega_m)^2}{2g} \right\} (41)$$

während die Druckänderungen in beiden Strahlen sich nach Gleichung (37) bestimmen zu

$$\frac{p - p_1}{\gamma} = \frac{\omega_m (\omega_{m1} - \omega_m)}{g} \dots \dots \dots (42)$$

$$\frac{p - p_2}{\gamma} = \frac{\omega_m (\omega_{m2} - \omega_m)}{g} \dots \dots \dots (43)$$

Die Strömung bei plötzlicher Querschnittsverengung vereinigt in ihrem Verlaufe die Erscheinungen der im III. Abschnitte behandelten Strahlkontraktion mit denen der plötzlichen Querschnittserweiterung. (Fig. 90.) Da bei der Kontraktion ein

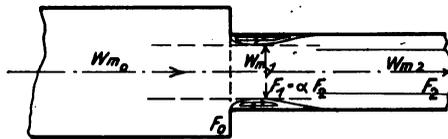


Fig. 90.

Geschwindigkeitsverlust φ auftritt, erhalten wir mit den Bezeichnungen der Figur für den totalen Energieverlust die Beziehung

$$h_w = (1 - \varphi^2) \frac{\omega_{m0}^2}{2g} + \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2g} \dots \dots \dots (44)$$

und da

$$\frac{\omega_{m1}^2}{2g} = \varphi^2 \cdot \frac{\omega_{m0}^2}{2g} \text{ bzw. } \omega_{m1} = \frac{\omega_{m2}}{\alpha}$$

wenn α den Kontraktionskoeffizienten bezeichnet, geht Gleichung

chung (44) über in

$$h_w = \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2 \cdot \alpha^2} \cdot \frac{w_{m2}^2}{2g} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 \cdot \frac{w_{m2}^2}{2g} =$$

$$= \left\{ \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2 \cdot \alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 \right\} \cdot \frac{w_{m2}^2}{2g} \dots \dots \dots (44a)$$

Dabei ist φ von der Beschaffenheit der Durchflußkante (für scharfe Kante $\varphi = 0,965$), α von der Größe des Verhältnisses $F_0 : F_1$ abhängig¹⁾.

An Hand unserer bisherigen Ableitungen ist es nun möglich, gewissen hydrodynamischen Erscheinungen, die nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung nur durch den empirischen Versuch festgestellt und zahlenmäßig berücksichtigt werden können, eine theoretisch-analytische Erklärung zu geben, wie z. B. der Entstehung des Loslösungsverlustes bei Strömungen in erweiterten Kanälen, dem Auftreten des Druckhöhenverlustes beim Durchströmen von Knien rechteckigen bzw. kreisförmigen Querschnittes u. a. m.

Zur Erklärung des Loslösungsverlustes greifen wir auf die Strömung im plötzlich erweiterten Querschnitte zurück. Die Art und Entstehung des Energieverlustes läßt sich dort auch folgendermaßen darstellen: Denken wir uns, der aus dem Querschnitte F_1 zuströmende Strahl werde im Querschnitte F_2 an der ruhend gedachten Flüssigkeitswand b mit der (Relativ-) Geschwindigkeit $w_r = (w_{m1} - w_{m2})$ um 90° strahlenförmig abgelenkt. (Fig. 91.)

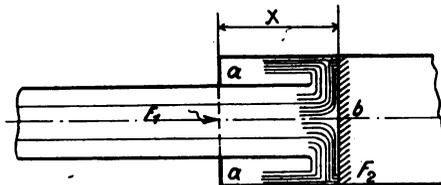


Fig. 91.

Der abgelenkte Strom wird beim Erreichen der zylinderförmigen Rohrbegrenzung abermals abgelenkt, diesmal aber nach zwei Seiten. Wir setzen voraus, daß der Strom nur nach einer Richtung hin stationär abströmen kann, während sich nach der andern Richtung ein »toter« Raum a erstreckt, in welchem die Flüssig-

¹⁾ Siehe Hütte, 21. Aufl., 1911, I. Band, S. 305.

keit wohl zirkulieren, aber nicht wegfließen kann. Wir haben damit einen Sonderfall der oben unter 2. besprochenen Ablenkung eines freien Strahles in einer kanalartigen Rinne vor uns. Gemäß Gleichung (23) sind die nach beiden Seiten abströmenden Teile der Strommasse mit $\alpha_0 = 90^\circ$

$$M_1 = M_2 = \frac{M}{2} \dots \dots \dots (23a)$$

Von diesen Teilmassen verliere die eine, nach dem toten Raume abgelenkte, durch Reibung und Wirbelung ihren gesamten Inhalt an kinetischer Energie, demnach

$$E_1 = \frac{M}{2} \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2} = \frac{M}{2} \cdot \frac{\omega_r^2}{2} \dots \dots \dots (45)$$

während die andere Teilmasse verlustlos abströmt.

Wegen der Kontinuität der Strömung muß nun die in den toten Raum abgelenkte und ihrer kinetischen Energie beraubte Teilmasse wieder auf die Geschwindigkeit ω_r beschleunigt werden. Dies kann aber nur durch plötzliche Energieaufnahme aus dem Energieinhalte der aus F_1 zuströmenden Flüssigkeitselemente geschehen. Wir erhalten damit einen weiteren Energieverlust der sich gemäß Gleichung (41) bestimmt zu

$$E_2 = \frac{M}{2} \cdot \frac{\omega_r^2}{2} = \frac{M}{2} \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2} \dots \dots \dots (46)$$

Der Gesamtverlust wird damit

$$E = E_1 + E_2 = M \cdot \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2} \dots \dots \dots (47)$$

bzw. pro Gewichtseinheit der strömenden Flüssigkeit

$$E_0 = \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2g} \dots \dots \dots (37a)$$

d. h. identisch mit dem aus Gleichung (37) bestimmten Werte.

Der Nachweis, daß die in den toten Raum abgelenkte Teilmasse ihren kinetischen Energieinhalt verlieren muß, ergibt sich aus folgender Überlegung: Wäre keine Energieverminderung (durch Reibung, Wirbelung usw.) vorhanden, dann würde sich unter dem Einflusse der Druckdifferenz zwischen b und a eine Sekundärströmung mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\omega_r = (\omega_{m1} - \omega_{m2})$ entwickeln, welche die mit der gleichen Geschwindigkeit $\omega_r = (\omega_{m1} - \omega_{m2})$ fließende Hauptströmung allseitig umhüllt. Da aber damit der Druck in der Grenzschicht der Haupt-

strömung bzw. über den ganzen Querschnitt derselben stets unverändert bliebe, läge auch zur Ausbreitung des Strahlquerschnittes in der Querschnittserweiterung keine Möglichkeit vor und der von der Sekundärströmung auf der ganzen Rohrlänge begleitete Hauptstrahl würde mit unverminderter Geschwindigkeit durch den Erweiterungsquerschnitt hindurchströmen. Es ist daher für das Eintreten der Geschwindigkeitsverminderung des Hauptstrahles unbedingt erforderlich, daß die Geschwindigkeitsenergie der Sekundärströmung verschwindet. Da der Versuch lehrt, daß diese Erscheinung durch den Rauheitsgrad der Rohrwand nicht beeinflusst wird, anderseits aber die Sekundärströmung bei größerer Wandrauigkeit ihre Energie auf kürzerem Wege einbüßt, ist der Schluß zulässig, daß sich die Entfernung des Stromquerschnitts b bzw. die Größe des Wirbelraumes A je nach dem Grade der Wandrauigkeit und dem Fließzustande der Hauptströmung selbsttätig einstellt.

Stufen wir die plötzliche Querschnittserweiterung derart ab, daß wir den größten Querschnitt aus dem kleinsten mit n gleichen Geschwindigkeitsintervallen erreichen (Fig. 92), so tritt ein n -

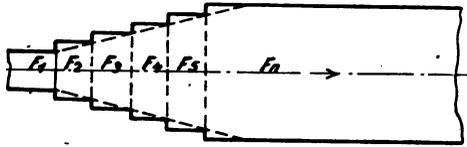


Fig. 92.

facher Energieverlust auf, der sich in seiner Gesamtheit ergibt zu

$$E = n \cdot \frac{\left(\frac{\omega_{m1} - \omega_{m2}}{n} \right)^2}{2g} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\omega_{m1} - \omega_{m2})^2}{2g} \quad (48)$$

D. h.: Durch die Unterteilung des Querschnittsverhältnisses ist eine dieser Unterteilung proportionale Verminderung des Energieverlustes gegenüber der früher betrachteten Strömung eingetreten. Macht man die Stufenzahl des Geschwindigkeitsgefälles unendlich groß, so geht das plötzlich erweiterte Rohr in das allmählich erweiterte über. Nach Gleichung (48) würde mit $n = \infty$ der Energieverlust im allmählich erweiterten Rohre, von den Verlusten durch Wandreibung abgesehen, überhaupt verschwinden, und zwar unabhängig vom Erweiterungswinkel, der in Gleichung (48) gar

nicht erscheint. Dies entspricht jedoch nicht der tatsächlichen Strömung. Gleichung (48) setzt nämlich voraus, daß die Ablenkung in jeder Stufe vollendet ist, bevor die Hauptströmung die nächste Geschwindigkeitsstufe erreicht. Dies ist aber bei der unendlich großen Stufenzahl der allmählichen Erweiterung nicht möglich. Es werden daher, namentlich in der der Rohrwand benachbarten Grenzschichte, Hauptströmung und Sekundärströmung der aufeinanderfolgenden Stromquerschnitte (Stufen) sich gegenseitig beeinflussen bzw. teilweise aufheben. Da die Ablenkungsgeschwindigkeit hierbei gleich ist der Radialgeschwindigkeit der Grenzschichte, so erhalten wir für den spezifischen Energieverlust, hier als Loslösungsverlust bezeichnet und verteilt über sämtliche Moleküle des Querschnittes, die schon im zweiten Abschnitte aufgestellte Beziehung

$$E = h_w^{(\lambda)} = k_\lambda \cdot \frac{\omega_r^2}{2g} \cdot \frac{U}{F} \dots \dots \dots (49)$$

Der Koeffizient k_λ ist, wie a. a. O. erwähnt,¹⁾ selbst wieder abhängig vom Erweiterungswinkel, derart, daß er mit zunehmendem Winkel abnimmt. Dies ist damit zu erklären, daß bei großem Erweiterungswinkel der in der Richtung der Hauptströmung abgelenkte Teil der Masse der Grenzschichte viel größer ist als der in der Richtung der Sekundärströmung abgelenkte, so daß die schädliche Einwirkung der letzteren auf die erstere geringer wird. Allerdings wächst mit großem Winkel die Radialgeschwindigkeit so beträchtlich, daß trotz des günstigeren Wertes für den Faktor k_λ ein größerer Loslösungsverlust resultiert.

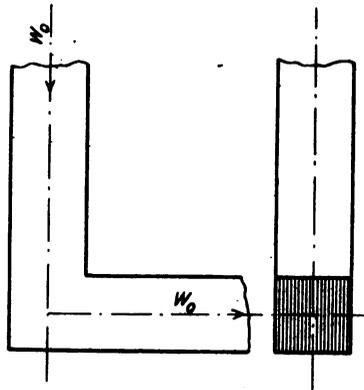


Fig. 93.

Beim Durchfließen des rechteckigen Knies (Fig. 93) haben wir, soweit die dynamischen Verhältnisse in Betracht kommen, eine der vorstehend besprochenen ähnliche Strömung vor uns. Der mit der Geschwindigkeit ω_0 zuströmende Strahl teilt sich gemäß

¹⁾ Siehe II. Abschnitt, S. 64.

Gleichung (23) in zwei Teile, von denen der eine, in der Richtung des abgelenkten Schenkels abgelenkte, frei abfließen kann, während der andere, in der entgegengesetzten Richtung abgelenkte, seinen gesamten Inhalt an kinetischer Energie an der Rückwand des Knies einbüßt. Da nun wegen der Kontinuität der Strömung auch letzterer Teil der Strahlmasse schließlich in der Richtung des abgelenkten Schenkels abfließen muß, nimmt er die hierzu nötige Energie von der strömenden Masse auf. Dabei ist wieder gemäß Gleichung (41) der Energieverlust gleich dem von der abgelenkten und zum Stillstand gebrachten Teilmasse verlorenen Inhalte an kinetischer Energie. Es gilt demnach mit den Bezeichnungen der Figur für den Gesamtverlust die Beziehung

$$E = h_w(stu) = 2 \cdot M_2 \cdot \frac{\omega_0^2}{2} = \gamma \cdot F_0 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} (1 - \cos \alpha_0) \quad (50)$$

$\gamma \cdot F_0 \cdot \omega_0$ ist gleich dem Gewichte der pro Zeiteinheit zu strömenden Flüssigkeitsmenge, so daß wir als Energieverlust der Gewichtseinheit der durch das Knie strömenden Flüssigkeit erhalten

$$E_0 = \frac{\omega_0^2}{2g} (1 - \cos \alpha_0) \quad \dots \quad (51)$$

In dieser Gleichung ist allerdings der Einfluß der durch den Versuch festgestellten, teilweisen Rückströmung der Flüssigkeitselemente längs der Rückwand des Knies nicht zum Ausdruck gebracht. Er macht sich jedoch nur bei großen Winkelwerten, $\alpha_0 > 75^\circ$, in merkbarer Weise geltend. Die nach Gleichung (51) berechneten Energieverluste sind für variable Winkel im Diagramme (Fig. 94) dargestellt. Kurve *B* gibt die aus den Versuchen Gibsons¹⁾ gefundenen Verlustwerte. Wie ersichtlich, stimmen die Resultate der Versuche bis auf diejenigen für Winkelwerte $\alpha_0 > 75^\circ$ mit den aus Gleichung (51) errechneten gut überein.

Für die Strömung durch Knie kreisförmigen Querschnittes (Fig. 95) gilt theoretisch die gleiche Beziehung (51) wie für den rechteckigen Querschnitt, da jedoch die Ablenkungsstellen der einzelnen Strahlschichten nicht, wie dort, in einer Ebene liegen, wird namentlich die Beschleunigung der zum Stillstande gebrachten Teilmasse allmählicher, demnach verlustloser erfolgen als im Falle

¹⁾ A. H. Gibson, The Loss of Energy at oblique impact of two confined streams of water, trans. of the Royal Soc. of Edinburgh 1913, Vol. XLVIII, part. IV, p. 804.

des rechteckigen Querschnittes. In Fig. 94 stellt Kurve *C* die von Weisbach¹⁾ ermittelten Versuchswerte der Energieverluste in Knien kreisförmigen Querschnittes dar.

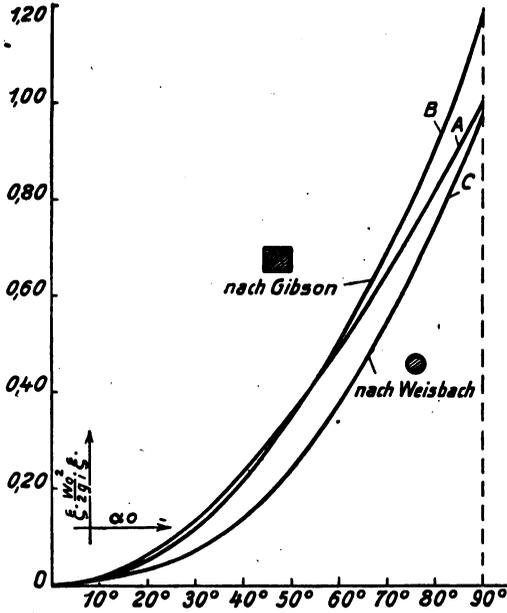


Fig. 94.

Wir wollen nunmehr die Strömungen betrachten, bei denen zwei oder mehrere Strahlen von verschiedener Richtung und ver-

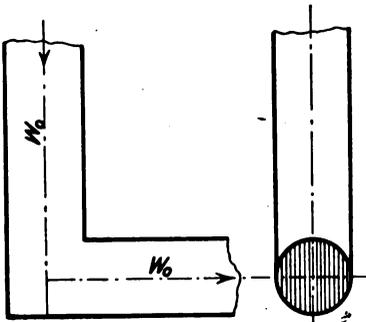


Fig. 95.

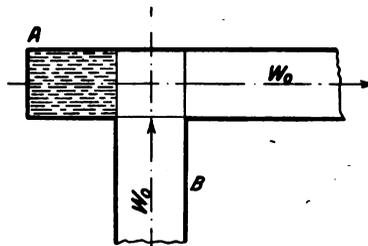


Fig. 96.

¹⁾ Siehe Hütte 1911, I. Band, 21. Aufl., S. 299.

schiedener Geschwindigkeit zusammentreffen. Das einfachste dieser Probleme, die z. B. beim Einmünden eines Nebenflusses in einen Hauptstrom, in der Konstruktion der Wasserturbinen bzw. Kreiselpumpen usw. eine bedeutende Rolle spielen, ist gegeben durch die Strömung in einem rechtwinklig abgelenkten Doppel-T-Stück von rechteckigem Querschnitte (Fig. 96), das am Rohrende *A* abgeschlossen ist. Der durch den Schenkel *B*

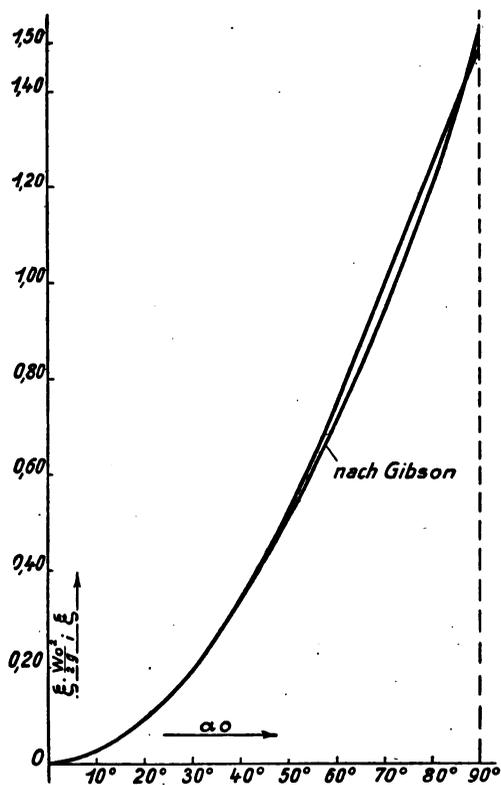


Fig. 97.

zuströmende Strahl wird dabei, ähnlich wie im vorbesprochenen Falle der Strömung durch das vierkantige rechtwinkelige Knie, um 90° abgelenkt. Der Unterschied zwischen den beiden Strömungen liegt aber darin, daß hier der zuströmende Strahl auch das im Totraume bei *A* befindliche Wasser bei der Ablenkung beeinflusst. Diese Beeinflussung geschieht offenbar durch jene

Teilmasse der Hauptströmung, die nach den von uns abgeleiteten Gesetzen nach dem toten Raume abgelenkt wird, und zwar so, daß je ein Molekül dieser Teilmasse ein Molekül der stillstehenden Masse im Zuströmen auf die Stromgeschwindigkeit beschleunigt. Die Energieaufnahme aus der Gewichtseinheit der zuströmenden Flüssigkeit ist hierbei gleich

$$E = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{2g} \cdot (1 - \cos \alpha_0) \dots \dots \dots (52)$$

Außerdem geht die nach Gleichung (51) als Verlust bestimmte Energie der Ablenkung in den Totraum. Die gesamte vom Totwasser aufgenommene Energie wird nun, soferne der Querschnitt A gleich ist dem in B , wegen der über den ganzen Querschnitt A sich erstreckenden Wirkung des Ablenkungsvorganges in Reibung und Wirbelbildung aufgezehrt, so daß wir in diesem Falle gemäß Gleichung (51) pro Gewichtseinheit der strömenden Flüssigkeit als Gesamtverlust an Strömungsenergie erhalten (Fig. 97)

$$E = E' + E'' - \frac{3}{2} E' = \frac{3}{2} (1 - \cos \alpha_0) \frac{\omega_0^2}{2g} \dots \dots (53)$$

Ist das Querschnittsverhältnis $\frac{F_2}{F_1} > 1$, ($\frac{F_2}{F_1} = m$), so wird sich die Einwirkung des Ablenkungsvorganges nur auf den Teilquerschnitt F_1 des Querschnittes F_2 erstrecken. Daher wird auch die an das Totwasser übertragene Energie bloß im Verhältnisse $F_1:F_2$ aufgezehrt. Es tritt eine in Fig. 98 angedeutete Zirkulation

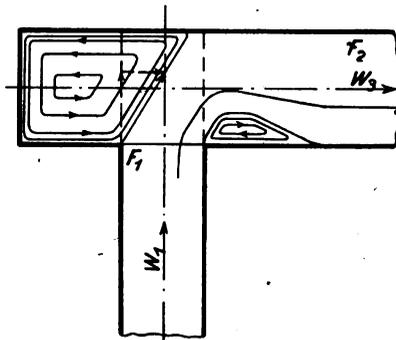


Fig. 98.

der Totwassermenge ein, welche die Hauptströmung derart beeinflusst, daß die unter einem Winkel von 90° zuströmenden Ele-

mente desselben unter einem dem Werte dieses Querschnittsverhältnisses entsprechenden Winkel abgelenkt werden. Die Querschnittserweiterung hat demnach auf den Verlauf der Hauptströmung die Wirkung einer Verminderung des Ablenkungswinkels mit der nach Gleichung (53) auch eine Verminderung der Energieverluste verbunden ist. Gleichzeitig bedingt aber die Querschnittserweiterung auch eine plötzliche Geschwindigkeitsverminderung der Hauptströmung nach der Ablenkung, die einen weiteren Energieverlust nach sich zieht. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit in B mit ω_1 , die in A nach der Ablenkung mit ω_3 , wobei

$$\omega_3 = \frac{\omega_1}{m} \dots \dots \dots (54)$$

so erhalten wir als Energieverlust der plötzlichen Querschnittserweiterung gemäß Gleichung (37)

$$E''' = \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \frac{\omega_1^2}{2g} = \frac{(\omega_1 - \omega_3)^2}{2g} \dots \dots \dots (55)$$

Der Gesamtverlust ergibt sich somit zu

$$E = \frac{E_0}{m} + E''' = \left\{ \frac{3}{2m} (1 - \cos \alpha_0) + \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \right\} \frac{\omega_1^2}{2g} \quad (56)$$

Sein Mindestwert ergibt sich für einen bestimmten Winkel α_0 nach Differentiation der Gleichung (56) nach m , wenn m den Wert annimmt

$$m = \frac{1}{1 - 0,75 (1 - \cos \alpha_0)} \dots \dots \dots (57)$$

Die nach Gleichung (56) berechneten Verluste sind in den Kurven der Fig. 99 für verschiedene Werte des Winkels α_0 und des Querschnittsverhältnisses m dargestellt.

Fig. 100 zeigt die von Gibson¹⁾ mit einer Versuchseinrichtung nach Fig. 101 experimentell festgestellten Verlustwerte. Sie stehen mit den von uns theoretisch abgeleiteten in befriedigender Übereinstimmung.

Gleichungen (56) und (57) können demnach ohne weiteres zur Bestimmung der günstigsten Querschnittsverhältnisse bei Richtungsänderungen in offenen oder geschlossenen Kanälen

¹⁾ A. H. Gibson, The loss of energy at oblique impact of two confined streams of water, Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1913, Vol. XLVIII, part IV, p. 804.

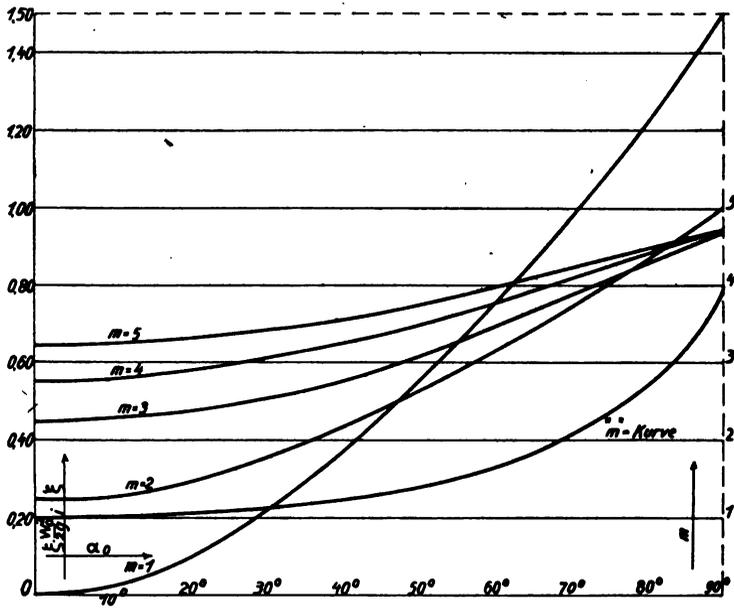


Fig. 99.

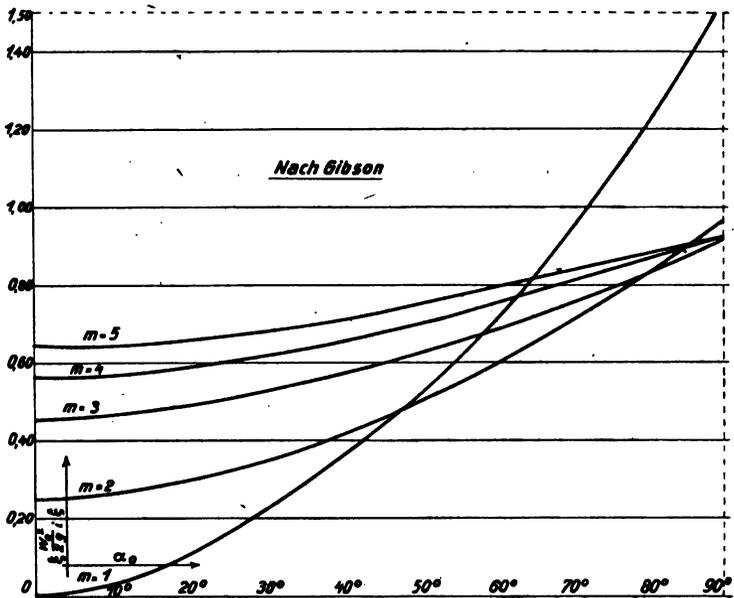


Fig. 100.

(Flußläufen usw.) benutzt werden, die an der Ablenkungsstelle einen Totraum aufweisen.

Treffen zwei Strahlen von gleicher mittlerer Geschwindigkeit so aufeinander, daß sie nach erfolgter Ablenkung unter dem halben

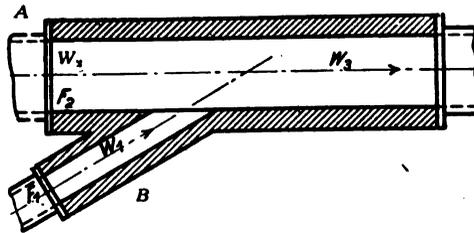


Fig. 101.

Ablenkungswinkel $\frac{\alpha_0}{2}$ bei unveränderter mittlerer Geschwindigkeit abfließen, Fig. 102, so ist der Gesamtverlust gleich

$$E = 2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2}\right) \cdot \frac{w_0^2}{2g} \dots \dots \dots (58)$$

bzw. gleich demjenigen, der aufgetreten wäre, wenn jede der

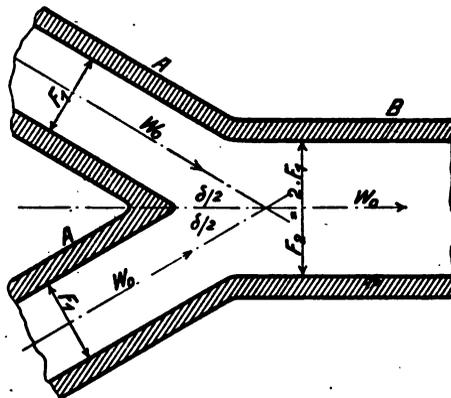


Fig. 102.

Strahlen für sich ein Knie vom Ablenkungswinkel $\frac{\alpha_0}{2}$ durchströmt hätte. Gleichung (58) bestimmt die in Doppel-T- und ähnlichen symmetrisch angeordneten Übergangs- und Verbindungsrohren (Kanälen usw.) auftretenden Energieverluste. Hat der Kanalteil B

größeren Querschnitt als der Summe der Querschnitte der beiden Arme A entspricht, so erhöht sich der Energieverlust auf

$$E = 2 \left[\left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) + \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \right] \cdot \frac{w_0^3}{2g} \quad (59)$$

wobei m , ähnlich wie früher, das Querschnittsverhältnis $F_2:2F_1$ bezeichnet.

Findet die Ablenkung der zusammentreffenden Strahlen nicht symmetrisch statt oder (und) ist ihre Geschwindigkeit vor dem Zusammentreffen verschieden, so treten Strömungen auf, die auf Grund des zur Zeit zur Verfügung stehenden Versuchsmaterials nicht genügend sicher theoretisch und analytisch begründet werden können. Immerhin liefern die Ergebnisse der Untersuchungen Gibsons einige interessante und praktisch verwertbare Anhaltspunkte. Gibson fand an seiner in Fig. 101 dargestellten Versuchseinrichtung, daß der Gesamtverlust pro Gewichtseinheit des durch B zuströmenden und in die Richtung des durch A fließenden Stromes abgelenkten Strahles sich ergibt zu

$$E = a \cdot \frac{w_1^2}{2g} + b \cdot \frac{w_2^2}{2g} \quad (60)$$

wobei a und b für einen bestimmten Ablenkungswinkel α_0 und ein gegebenes Querschnittsverhältnis $\frac{F_1}{F_2} = m$ konstante sind. D. h. bei konstanter Geschwindigkeit des primären bzw. sekundären Stromes und bei gegebenem Ablenkungswinkel und Querschnittsverhältnisse ist der Energieverlust nur mit der Geschwindigkeitshöhe des sekundären bzw. primären Stromes linear veränderlich. Daraus geht hervor, daß die gegenseitige Beeinflussung der beiden Ströme der sekundlichen Durchflußmenge derselben proportional ist bzw. daß das Verhältnis der im ersten Strome pro Zeiteinheit fließenden Flüssigkeitselemente zu den von ihnen im zweiten Strome pro Zeiteinheit beeinflussten Stromelementen konstant ist.

Die Art dieser Beeinflussung, die jedenfalls teilweise in Ablenkung, teilweise in Rückströmung und teilweise in Wirbelbildung besteht, läßt sich, wie erwähnt, analytisch nicht mit Sicherheit beschreiben. Zum Teile lassen sich aber diese Erscheinungen aus folgender Überlegung erklären: Betrachten wir die beiden Ströme derart, daß der eine für den andern das Totwasser bildet, so findet sich zunächst der Verlustanteil des Sekundär-

stromes B bzw. der Koeffizient des zweiten Summanden der Gleichung (60) mit $\omega_1 = 0$ aus Gleichung (56)

$$b \cdot \frac{\omega_2^2}{2g} = \left\{ \frac{3}{2m} (1 - \cos \alpha_0) + \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \right\} \frac{\omega_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad (61)$$

zu

$$b = \frac{3}{2m} (1 - \cos \alpha_0) + \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (61a)$$

Die von Gibson gefundenen Versuchswerte stimmen bezüglich des Faktors b mit den durch Gleichung (61a) gegebenen befriedigend überein (Fig. 103). Für die Größe des Faktors a fand sich aus den Versuchen die angenäherte Beziehung

$$a = \frac{0,0052}{m} \cdot a^{1,28} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

die innerhalb der unten angegebenen Grenzen mit

$$a = \frac{3}{2m} \cdot \sin^2 \alpha_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62a)$$

identische Werte ergibt.

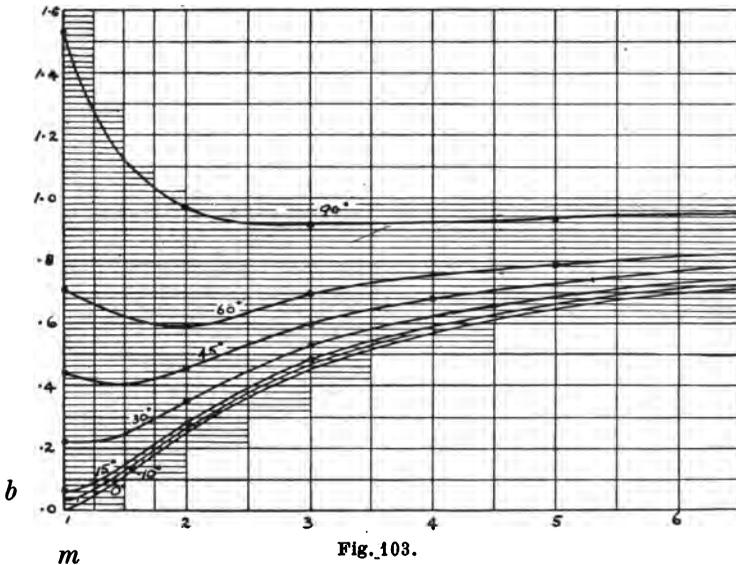


Fig. 103.

Gleichung (62) bzw. (62a) sind gültig, wenn m den Wert 2 nicht unter- und α_0 den Wert 60° nicht überschreitet. (Fig. 104).

Setzen wir die gefundenen Werte in Gleichung (60) ein, so erhalten wir mit

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{F_1 \cdot \omega_1}{F_2 \cdot \omega_2} = n \dots \dots \dots (63)$$

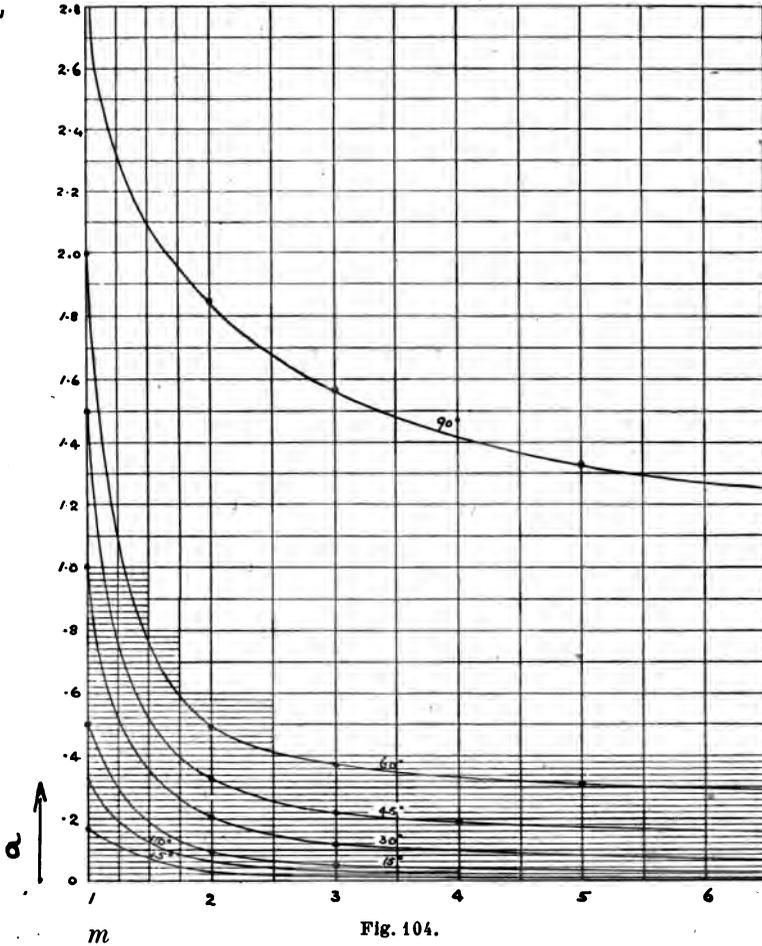


Fig. 104.

bzw.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m} \dots \dots \dots (64)$$

$$E = \left\{ \frac{3}{2m} \sin^2 \alpha_0 \left(\frac{n}{m} \right)^2 + \frac{3}{2m} (1 - \cos \alpha_0) + \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \right\} \frac{\omega_2^2}{2g} \quad (60a)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation nach m bei gegebenem n und α_0 der Mindestverlust, wenn m den Wert annimmt

$$m = \frac{2 + \sqrt{4 + 9n^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 (1 + 3 \cos \alpha_0)}}{1 + 3 \cos \alpha_0} \quad (65)$$

Nach Gleichung (65) sind die in den Kurven der Fig. 105 und 106

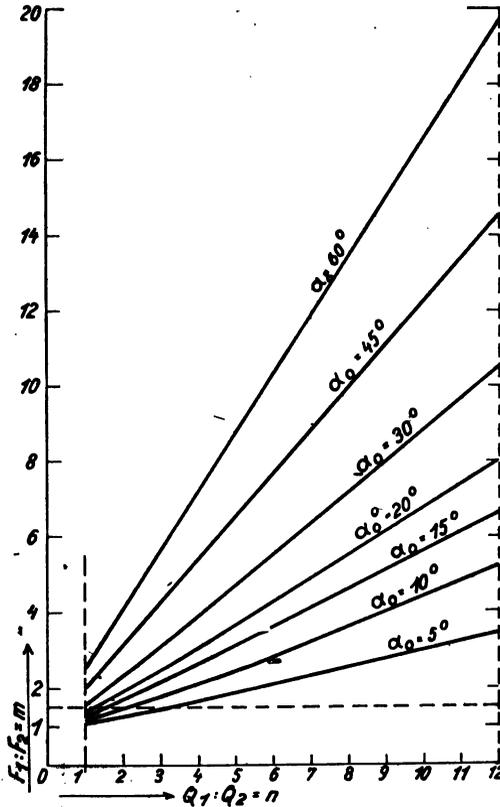


Fig. 105.

dargestellten Werte der günstigsten m sowie die zugehörigen Minimalverluste für gegebene n und α_0 ermittelt. Sie können bei der Dimensionierung und Anordnung von Kanal- und Rohranschlüssen (Flußregulierungen usw.) der beschriebenen Art Verwendung finden.

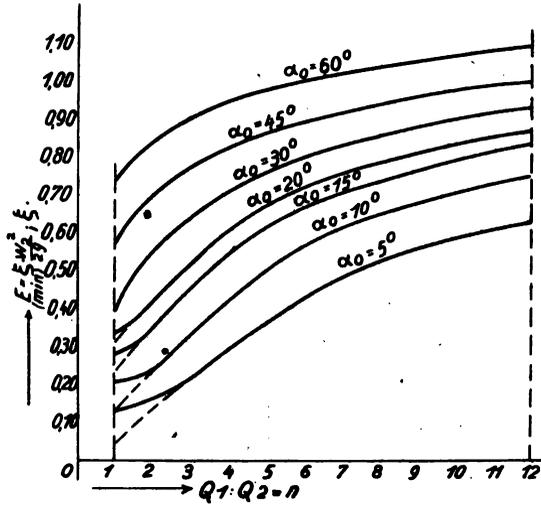


Fig. 106.

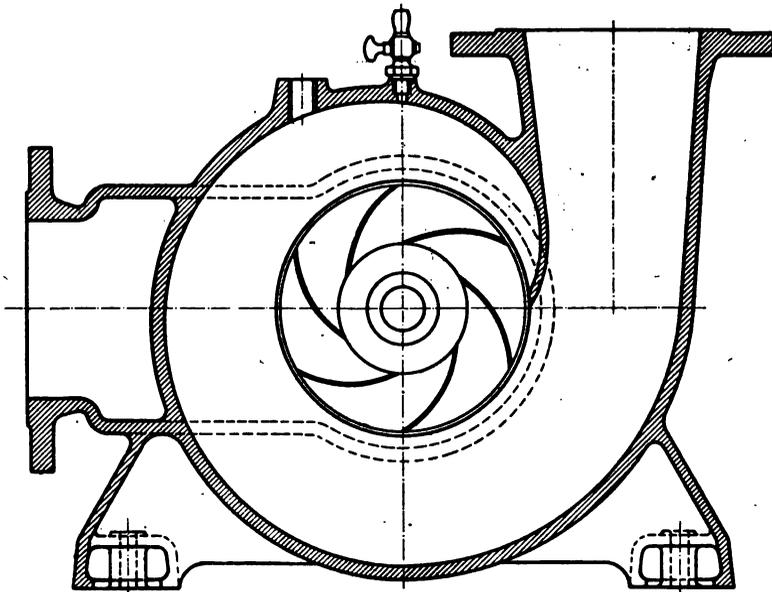


Fig. 107.

Es liegt nun nahe, die gewonnenen Ergebnisse auf das Problem der Strömung im Spiralgehäuse von Kreiselpumpen usw. anzuwenden. (Fig. 107.) Hier nimmt das Verhältnis zwischen primärer und sekundärer Strommenge n längs des Umfanges von null bis unendlich zu. Die Erscheinungen werden jedoch durch das Auftreten von beträchtlichen Reibungs- und Krümmerverlusten und bei divergierenden Spiralgehäusen auch von Lösungsvverlusten derart verwickelt, daß ihre rechnerische Behandlung beinahe unmöglich ist. Im Hinblick auf die letztgenannten Verluste erscheint es von Vorteil, zur Verminderung der Stromgeschwindigkeit zwischen Laufrad und Spiralgehäuse einen düsen-

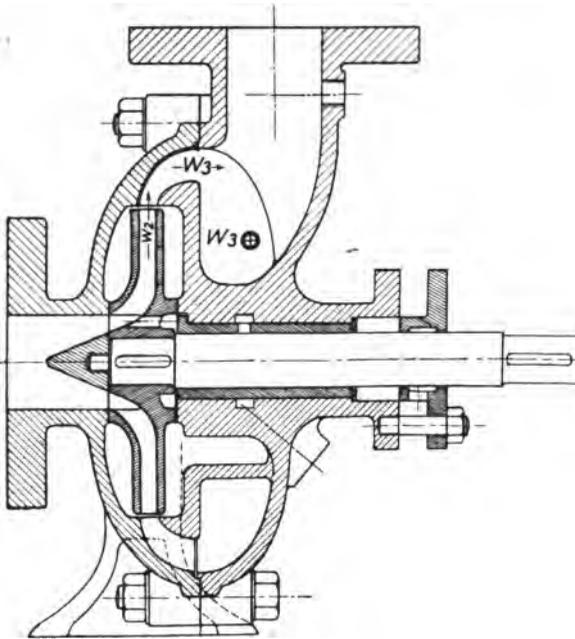


Fig. 108.

artigen (schaufellosen) Übergangsraum einzuschalten und die Querschnitte der Spirale selbst für konstante Geschwindigkeit zu berechnen, derart, daß $\omega_3 = 0,75 \sim 1 \omega_3'$ und ω_3' ungefähr $0,5 \omega_2$ wird. Der Nachteil der mit dieser Einrichtung verbundenen größeren Bauhöhe und schwereren Konstruktion der Pumpen kann durch die in Fig. 108 dargestellte Anordnung umgangen

werden. Versuche an einer Pumpe von 200 mm Rohranschlußweite dieser Bauart ergaben bei einer Liefermenge von 5000 l pro Minute und einer Tourenzahl von 750 pro Minute einen Wirkungsgrad der Umsetzung von kinetischer in Pressungsenergie zwischen Laufradaustritt und Druckrohrstutzen von

$$\eta_{sp} = 0,77 \frac{w_2^2}{2g},$$

während der Wirkungsgrad bei derselben Tourenzahl und verminderter Liefermenge, also einem kleineren Werte $\frac{w_3}{w_1}$ als oben angegeben, sich beträchtlich vermindert. So beträgt derselbe bei 3850 l pro Minute Liefermenge bloß

$$\eta_{sp} = 0,65 \frac{w_2^2}{2g}$$

und bei 1900 l pro Minute Liefermenge

$$\eta_{sp} = 0,40 \frac{w_2^2}{2g}.$$

Ist die konstante Geschwindigkeit im Spiralgehäuse größer als die Geschwindigkeit in der angeschlossenen Druckrohrleitung, so ist der Übergang der Endquerschnitte zwischen Spirale und Druckrohr durch eine allmähliche konische Erweiterung von etwa 10° totalem Erweiterungswinkel zu bewerkstelligen.

Eine weitere Nutzenanwendung finden die Ableitungen dieses Abschnittes bei der Berechnung der Abmessungen und Leistungen der Schaufelräder (Radschaukeln) von Raddampfern, wie sie in der Kanal-, Binnensee-, Fluß- und Küstenschiffahrt noch vielfach verwendet werden, sowie in der rechnerischen Behandlung der in ihrer Wirkung den Radschaukeln analogen Tragflächen von Flugzeugen usw. Die Berechnung kann wegen des noch nicht genügend aufgeklärten Einflusses des (endlich oder unendlich ausgedehnten) Fahrwassers auf die Energieumsetzung zwar nur näherungsweise erfolgen, führt aber auf Beziehungen, die mit der praktischen Erfahrung in sehr gutem Einklange stehen. Die ausführliche Behandlung der hierbei auftretenden Erscheinungen sei einer besonderen Arbeit vorbehalten.

VI. Abschnitt.

Die Kreisräder.

A. Die Theorie der Kreisräder.

Zu den Maschinen, die wir als Kreisräder (Turbomaschinen) bezeichnen, gehören die Wasser- und Dampfturbinen (Gasturbinen), Kreiselpumpen, Kreiselgebläse, Schiffs- und Luftschrauben, hydraulischen Transformatoren (System Föttinger), Kreiselluftpumpen und Kreiselradkältemaschinen. Wir wollen uns hier, den in der Einleitung angegebenen Grenzen unserer Betrachtungen gemäß, bloß mit denjenigen Kreisrädern befassen, für die als Arbeits- bzw. Fördermittel ausschließlich tropfbare Flüssigkeiten in Betracht kommen. Die grundlegenden Ableitungen der Theorie behalten jedoch auch für die übrigen Arten der Kreisräder sinngemäß ihre Gültigkeit.

Die Wirkungsweise der Kreisräder besteht in der Hauptsache darin, kinetische Energiemengen der Arbeitsflüssigkeit durch Ablenkung der letzteren an gekrümmten Flächen bei gleichzeitiger Geschwindigkeitsänderung in mechanische Arbeit umzusetzen oder umgekehrt mechanische Arbeit auf dem gleichen Wege in kinetische bzw. potentielle Energie zu verwandeln. Die mathematische Behandlung der hydrodynamischen Erscheinungen, die bei diesen Energieumsetzungen auftreten, und die daraus abgeleitete Feststellung der günstigsten Rad- und Schaufelformen, ihrer Größenverhältnisse und der ihnen zugeordneten Energieverluste bilden das Problem der Kreisradtheorie.

Zur geschichtlichen Entwicklung dieser Theorie sei kurz erwähnt, daß ihre ersten Anfänge von Euler stammen, dessen Momentensatz die einzige gesicherte Grundlage für die seither entstandenen Theorien bildete. Die von Euler selbst aufgestellte Stromfadentheorie betrachtet den Zustand der reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeitselemente längs eines räumlich gekrümmten, rotierenden mittleren Stromfadens von unendlich

kleinem Querschnitte, um welchen herum die übrigen Stromelemente willkürlich gruppiert gedacht sind. Poncelet und Combes erweiterten diese Ableitungen durch Berücksichtigung der tatsächlich auftretenden Abweichungen vom theoretischen Stromverlauf (verursacht durch Reibung, Wirbelung, Unstetigkeiten der Strömung) unter Einführung empirischer Kontraktions- und Widerstandskoeffizienten, eine Methode, die bis zum Ende des 19. Jahrhunderts die wissenschaftliche Grundlage des Turbinenbaus bildete und von Zeuner (1900) abschließend in seinen »Vorlesungen über die Theorie der Turbinen« behandelt wurde. Der von Prasil (1903) angeregten, dreidimensionalen Darstellung der Strömungsvorgänge in Rotationshöhlräumen mittels der auf Zylinderkoordinaten umgeformten hydrodynamischen Grundgleichungen folgte die zweidimensionale Theorie Lorenz (1906), der seine Ableitungen unter Voraussetzung unendlich vieler Schaufeln (bzw. eines homogenen Kraftfeldes der Zwangsbeschleunigung der Schaufelreaktionen) und achsensymmetrischer Strömung durchführte. Die Gestalt des Radprofiles ist dabei durch die Funktionsform

$$\varphi = A \cdot (r^2 - r_0^2) \cdot (z - z_0)$$

bestimmt. Bauersfeld wies nach, daß die Lorenzschen Beziehungen auch für andere von den vorstehenden abweichenden Profilformen ihre Gültigkeit behalten, so lange die Radbegrenzungen durch Rotationsflächen gebildet werden, während Prasil (1907) ganz allgemein dreidimensionale Strömungen für die stationäre Relativbewegung in der ihm eigenen Art darstellte, eine Methode, die von v. Mises (1908) noch weiter ausgeführt wurde.

Von theoretischen Gesichtspunkten ausgehend, steckten sich alle diese Theorien das Ziel, auf Grund der einzigen gesicherten Voraussetzung — des Eulerschen Momentensatzes — den wahrscheinlichen Strömungsverlauf in den Kanälen der Kreisräder mit Hilfe der von der theoretischen Hydrodynamik abgeleiteten allgemeinen Bewegungsgesetze festzusetzen. Da diese allgemeinen Bewegungsgesetze eine vielfach unendliche Mannigfaltigkeit der Strömung zulassen, mußten für die Zwecke der betreffenden Theorien über den Verlauf der Strömung bestimmte, einschränkende Bedingungen aufgestellt werden. Unter Voraussetzungen bezüglich Form und Art der Strömung, bezüglich

Verteilung der Drücke und Geschwindigkeiten längs eines Parallelkreises bzw. Stromquerschnittes, die oft nicht durch praktische Erfahrung begründet und oft auch gemacht sind, um unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten der theoretischen Behandlung aus dem Wege zu gehen, sind vollständig ausgearbeitete, mathematisch streng umschriebene Kreiselradtheorien entstanden, die sich in ihrer praktischen Anwendung wenig bewährt haben. Diese Mißerfolge vieler geistreicher Gedanken und angestrebter wissenschaftlicher Arbeit, das Mißtrauen, das dieselben in der Folge unter den ausführenden Ingenieuren gegenüber der theoretischen Begründung der Kreiselradtheorien wachriefen, sind wohl auf die bisher mangelnde Erkenntnis zurückzuführen, daß das Kreiselradproblem nichts anderes ist, als das erweiterte Problem der Strömung im Krümmer, und daß man an die Lösung des ersteren schritt, bevor man eine Lösung für das letztere gefunden hatte.

Von dem eben ausgesprochenen Gesichtspunkte aus soll die Kreiselradtheorie im nachfolgenden ihre Behandlung finden.

Die in den Kreiseln hauptsächlich auftretenden hydrodynamischen Erscheinungen bestehen, für die günstigsten Arbeitsverhältnisse einerseits in möglichst stetigen Geschwindigkeitsänderungen, andererseits in möglichst stetigen Richtungsänderungen der Arbeitsflüssigkeit. Weichen die tatsächlichen Arbeitsverhältnisse von den günstigsten ab, so treten nebenher auch noch Gebiete in der Strömung auf, innerhalb welcher sich sowohl Geschwindigkeits- bzw. Druckänderungen, als auch Richtungsänderungen plötzlicher Art vollziehen. Es stellt demnach das erste Problem ein Zusammenwirken der in Abschnitt II und IV der vorliegenden Arbeit behandelten Strömungen, das zweite Problem die gleichen Erscheinungen unter Hinzutreten des in Abschnitt V behandelten hydraulischen Stoßes dar.

Wir wollen zunächst in schrittweiser Lösung der uns entgegenstehenden Fragen den Verlauf der Strömung verfolgen, die sich im allmählich erweiterten bzw. verengten gekrümmten Kanale einstellt, wie sie z. B. durch die Flüssigkeitsbewegung in den Leitzellen der Wasserturbinen und Kreiselpumpen, in den erweiterten Saugrohrkrümmern dieser Maschinen usw. gegeben ist. Wir gehen dabei stets von jener Krümmerform aus, die der Krümmung geringster Ablenkungsverluste nach Gleichung (24) des IV. Abschnittes entspricht.

Für den divergierenden Krümmen von rechteckigem Querschnitte sind drei verschiedene Formen möglich:

1. Bei gleichbleibender Höhe des Kanals verändere sich die Querschnittsbreite beim Durchlaufen der Krümmung symmetrisch oder asymmetrisch zur Krümmermittellinie. (Fig. 109.)

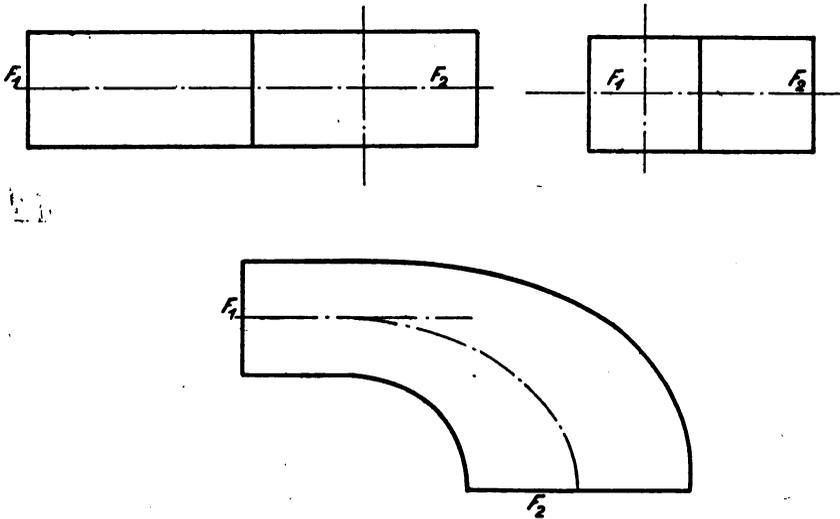


Fig. 109.

2. Bei unveränderter Form der Krümmung verändere sich die Kanalhöhe beim Durchlaufen der Krümmung symmetrisch oder asymmetrisch zur Krümmermittellinie. (Fig. 110.)

3. Der Kanalquerschnitt verändere sich beim Durchlaufen der Krümmung gleichmäßig nach 1. und 2. (pyramidenartige Erweiterung). (Fig. 111.)

Hierzu ist folgendes zu bemerken:

Zu 1. Die in der Krümmung strömenden Flüssigkeitsteilchen haben wegen der im IV. Abschnitte abgeleiteten Beziehung (11) das Bestreben, sich gegen die äußere Begrenzungsfläche zu drängen, so daß z. B. bei einer Erweiterung des Kanales nach 1. an der Innenseite der Krümmung eine diskontinuierliche Strömung bzw. ein Wirbelraum entsteht, der die Geschwindigkeitsverminderung nur unter großen Energieverlusten gestattet, während bei einer Verengung des Kanales ungleiche Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt auftritt, die mit Um-

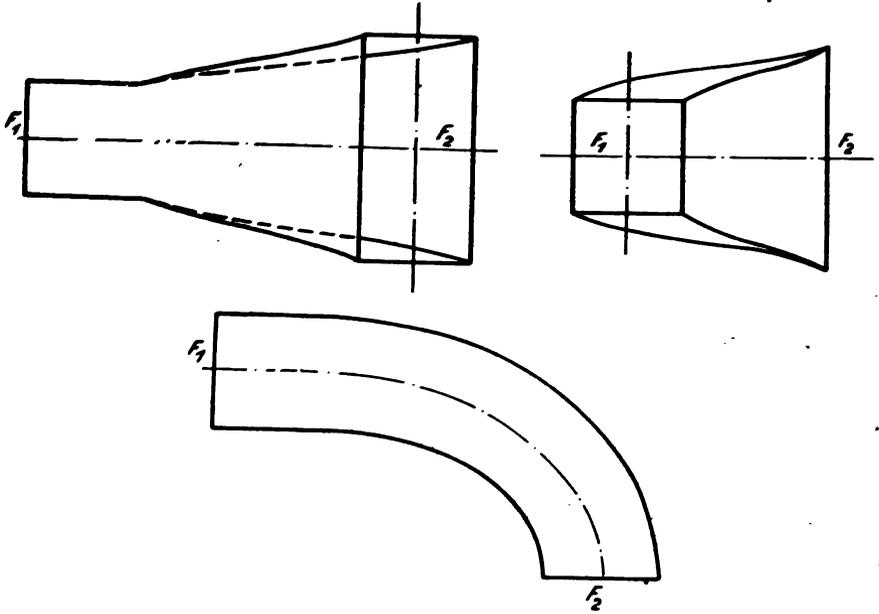


Fig. 110.

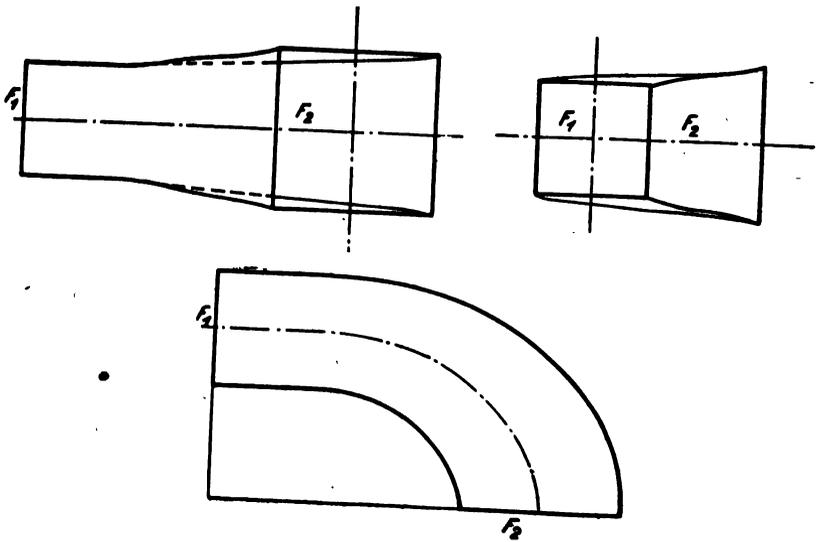


Fig. 111.

setzungsverlusten verbunden ist. (Die von Bánki ausgeführten, Seite 88 (IV. Abschnitt) besprochenen Messungen am gekrümmten Reaktionskanal lassen die letztere Erscheinung klar hervortreten.)

Zu 2. Da hier die Form der Krümmung unverändert bleibt, ist bei der Querschnittsänderung kein zusätzlicher Ablenkungsverlust zu erwarten. Die Querschnittsänderung nach der Höhe des Kanals erfolgt wegen des für die Energieumsetzung günstigen Auftretens einer Rotationskomponente der Flüssigkeitsteilchen in bezug auf die Krümmungsmittellinie AA mit sehr gutem Wirkungsgrade. Der mittlere Neigungswinkel der divergierenden

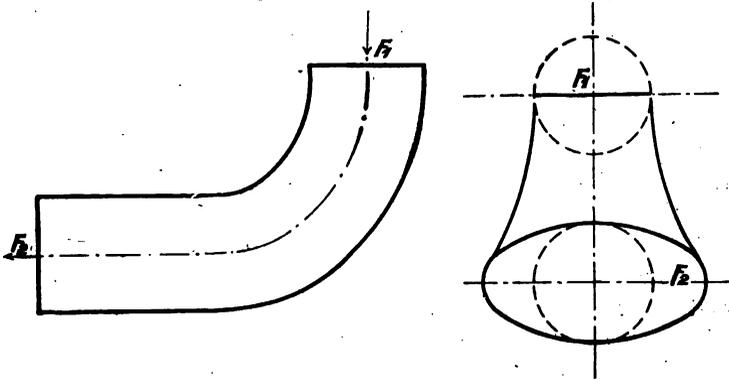


Fig. 112.

Begrenzungswände beträgt je nach dem Rauigkeitsgrade der Kanalwände $2\alpha_0 = 5^\circ \sim 8^\circ$. Die Geschwindigkeit ist hierbei, vom Einflusse der Turbulenz bzw. des Loslösungsverlustes abgesehen, in allen Punkten eines Stromquerschnittes gleich groß.

Zu 3. Diese Form vereinigt die Vorteile bei Querschnittsänderung nach 2. mit den Nachteilen der Energieumsetzung bei Querschnittsänderung nach 1., doch ist hier der Reibungsverlust geringer als unter 1. oder 2.

Aus vorstehender Betrachtung ist zu ersehen, daß die Querschnittsänderung des gekrümmten Kanales nach 2. die besten, die nach 1. die ungünstigsten Resultate hinsichtlich der Energieumsetzung ergibt, während Form 3. zwischen den beiden ersteren, jedoch näher zu 2. als zu 1. steht. Dies wird auch durch die weiter unten zu besprechenden Versuche des Verfassers an divergenten

Krümmern und durch seine Erfahrungen an Diffusoren von Hochdruckkreiselpumpen bestätigt. Es wird demnach Form 2. für die technische Verwendung überall dort in Betracht kommen, wo nicht konstruktive oder andere Rücksichten eine Querschnittsänderung nach Form 3. erzwingen.

Diese für die rechteckigen Querschnitte abgeleiteten Gesetze der Querschnittsänderung gelten sinngemäß auch für divergente Krümmern anderen, z. B. kreisförmigen Querschnittes (Saugrohrkrümmern usw.). Für den letzteren besteht demnach die günstigste Form in einem stetigen Übergange des Querschnittskreises in eine Querschnittsellipse, wobei der in die Symmetrieebene des Krümmers fallende Kreisdurchmesser zur kleinen Achse der Querschnittsellipse wird, während deren große Achse der verlangten Querschnittsänderung entspricht. (Fig. 112.)

Mit den Ergebnissen der vorstehenden Untersuchung und den in den Abschnitten I bis IV abgeleiteten Beziehungen können wir nunmehr die Leitradzellen, Saugrohrkrümmern usw. der Wasserturbinen, Kreiselpumpen usw. in ihrer Form und Größe für die günstigste Leistung bestimmen und die in ihnen auftretenden Energieverluste der Arbeitsflüssigkeit berechnen.

Einer ähnlichen Behandlung ist die Laufradzelle nicht ohne weiteres zugänglich. Ihre seitlichen Begrenzungen, die Laufschaufeln, entsprechen nicht der tatsächlichen Bahn der Flüssigkeitselemente im Raume, sondern deren Relativbewegung gegenüber dem Laufradkanal. Darum sind auch Form und Größe des letzteren trotz seiner materiellen Existenz für den Strömungsvorgang selbst nur Relativform und Relativgröße des tatsächlich durchflossenen Absolutkanals (Fig. 113), dessen ideelle, geometrische Existenz durch die gemeinsame Rad- und Flüssigkeitsbewegung zu einer physikalischen wird. Für diesen Absolutkanal nun gelten ganz analoge Gesetze, wie diejenigen, die wir oben für die Strömung in den ortsfesten Leitradzellen abgeleitet haben. Auch hier handelt es sich um allgemein stetige Querschnittsänderungen des Krümmers — Erweiterungen bei den Absolutkanälen der Wasserturbinen, Verengungen bei denjenigen der Kreiselpumpen. Solche Strömungen verlaufen aber, wie wir im IV. Abschnitt erkannt haben, nicht achsensymmetrisch und das Strömungsproblem ist, vom Einflusse der Reibung bzw. Wirbelung ganz abgesehen, wie dort, ein dreidimensionales. Wir wollen uns daher bei der Ableitung der Bewegungs- und Arbeits-

verhältnisse im Laufrade, im Gegensatz zu der sonst üblichen Betrachtungsweise, auf die Strömung durch den Absolutkanal beziehen und diese trotz des störenden Einflusses der bei der Rotation am Kanaleintritte bzw. Austritte vorbeistreichenden Leitschaufelenden vorläufig als stationär betrachten.

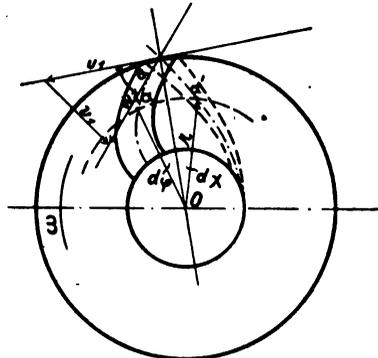


Fig. 113.

Wir denken uns zunächst irgend ein Flüssigkeitselement im Absolutkanal auf seiner Absolutbahn. Seine längs derselben veränderliche Strömungsgeschwindigkeit sei in einem bestimmten Punkte mit w , die Rotationsgeschwindigkeit in bezug auf die Turbinenachse mit u bezeichnet. Der ersteren entspricht pro Gewichtseinheit der Arbeitsflüssigkeit ein Inhalt an kinetischer Energie von $\frac{w^2}{2g}$, der letzteren eine Druckenergie im Betrage von $\frac{u^2}{2g}$. Denken wir uns für einen Augenblick den Absolutkanal in Ruhe und die mit dem Abstände des Flüssigkeitselementes von der Turbinenachse gesetzmäßig veränderliche Druckenergie $\frac{u^2}{2g}$ durch irgend eine Potentialkraft erzeugt, so ergäbe sich der gesamte Energieinhalt eines Elementes mit der Masse dm im betrachteten Bahnpunkte zu

$$E = dm \left(\frac{w^2}{2} + \frac{u^2}{2} \right) (1)$$

Nun hat aber dasselbe Flüssigkeitsteilchen, das sich auf seiner Absolutbahn auch in der rotierenden Laufradzelle befindet, in dem betrachteten Punkte noch eine Geschwindigkeitsenergie der

Relativbewegung, $\frac{v^2}{2g}$ pro Gewichtseinheit, die nicht nutzbar, sondern nur dazu nötig ist, um das Flüssigkeitselement trotz der Drehbewegung des Laufrades auf seiner Absolutbahn zu erhalten. Diese Relativenergie des Elementes muß nun, da keine andere Energiequelle vorhanden ist, aus dem momentanen Energieinhalte des Elementes selbst bestritten werden, so daß wir für den gesamten nutzbaren Energieinhalt des Flüssigkeitsteilchens im Punkte a ganz allgemein erhalten

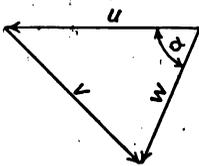
$$E' = dm \left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Geben wir den Geschwindigkeitsgrößen am Laufradeintritte den Index 1, denjenigen am Laufradaustritte den Index 2, so erhalten wir für die an das Rad auf dem Wege durch den Absolutkanal abgegebene elementare Arbeit des Flüssigkeitsteilchens als Differenzwert

$$dL = E_1' - E_2' = dm \left\{ \frac{\omega_1^2 + u_1^2 - v_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2 + u_2^2 - v_2^2}{2} \right\} \dots (3)$$

Nun hängen aber die Größen ω , u und v durch die geometrisch-kinematische Beziehung zusammen (Fig. 114):

$$v^2 = \omega^2 + u^2 - 2\omega \cdot u \cdot \cos \alpha \dots (4)$$



worin α den Winkel zwischen der Richtung von ω und u im betrachteten Bahnpunkte bezeichnet, so daß wir für Gleichung (3) auch schreiben können:

$$dL = dm \{ u_1 \omega_1 \cos \alpha_1 - u_2 \omega_2 \cdot \cos \alpha_2 \} \dots (5)$$

Bei gleichem Energieumsatze sämtlicher durch den Absolutkanal strömender Elemente ergibt sich die Gesamtleistung zu

$$L = m (u_1 \omega_1 \cdot \cos \alpha_1 - u_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos \alpha_2) \dots \dots (6)$$

bzw. mit

$$u_1 = r_1 \omega; \quad u_2 = r_2 \omega.$$

$$L = m \cdot \omega \cdot (r_1 \omega_1 \cos \alpha_1 - r_2 \omega_2 \cdot \cos \alpha_2) \dots \dots (7)$$

wobei m die gesamte, den Kanal in der Zeiteinheit durchströmende Masse und ω die konstante Winkelgeschwindigkeit des Laufrades bedeutet. Dehnen wir diesen Energieumsatz in gleicher Weise auf die übrigen Absolutkanäle des Laufrades aus, so können wir

für die Leistung der Gewichtseinheit der Arbeitsflüssigkeit auch schreiben:

$$L = \frac{\omega}{g} (r_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos \alpha_1 - r_2 \omega_2 \cdot \cos \alpha_2) \quad \dots \quad (8)$$

bzw. für das an der Turbinenachse wirksame Drehmoment

$$M = \frac{L}{\omega} = \frac{1}{g} (r_1 \omega_1 \cdot \cos \alpha_1 - r_2 \omega_2 \cdot \cos \alpha_2) \quad \dots \quad (9)$$

Bezeichnen wir allgemein $\omega \cdot \cos \alpha$ mit ω_n , der tangentiellen Geschwindigkeitskomponente im Zylinderkoordinatensystem, so schreibt sich Gleichung (9) auch:

$$M = \frac{1}{g} (\omega_{n1} \cdot r_1 - \omega_{n2} \cdot r_2) \quad \dots \quad (9a)$$

Dabei sind allerdings, da wir es, wie erwähnt, nicht mit achsensymmetrischer Strömung zu tun haben, ω_{n1} bzw. ω_{n2} als Mittelwerte der Tangentialkomponenten im Eintritte bzw. Austritte des Absolutkanals anzusehen. Tatsächlich müßte, der Forderung gleichen Energieumsatzes aller Flüssigkeitselemente entsprechend, jedes der letzteren im Eintritte und Austritte derartig korrespondierende Lagen einnehmen, daß Gleichung (5) für jedes der Stromelemente identisch erfüllt ist.¹⁾ Ausdruck (9) bzw. (9a) stellt aber nichts anderes dar, als den schon von Euler, allerdings auf anderem Wege, abgeleiteten Momentensatz.

Wir können dem letzteren auf Grund der im IV. Abschnitt, Seite 101, angestellten Betrachtung eine begriffliche Deutung geben. Ähnlich wie wir dort durch Verteilung der drei Krümmerstrecken $\overline{1a}$, \overline{ab} und $\overline{b2}$ auf zwei voneinander unabhängige rotierende Systeme A und B das Wesen der Fliehkraftenergie der Flüssigkeitsteilchen im ortsfesten Krümmer beleuchteten, können wir hier mit Hilfe des Absolutkanales das resultierende Drehmoment als Reaktion der in der Turbine insgesamt auftretenden Ablenkungsdrücke der strömenden Flüssigkeit definieren. (Fig. 115.) Die in bezug auf die Achse ursprünglich radiale Richtung der letzteren wird bis zum Eintritt in den Absolutkanal um den

¹⁾ Diese Bedingung widerspricht dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit. Es wird sich indessen auch ohne ihre Erfüllung durch entsprechenden Energieaustausch im Innern der Kanalströmung ein gleichmäßiger Energieumsatz aller an der Strömung beteiligten Flüssigkeitsteilchen einstellen.

Winkel $(90 - \alpha_1)$ abgelenkt, welcher Ablenkung im Gleichgewichtszustande des Systems eine Auflagerreaktion in tangentieller Richtung im Betrage von

$$P_1 = m \cdot \omega_1 \cdot \cos \alpha_1$$

bzw. ein Drehmoment

$$P_1 \cdot r_1 = m \cdot r_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos \alpha_1$$

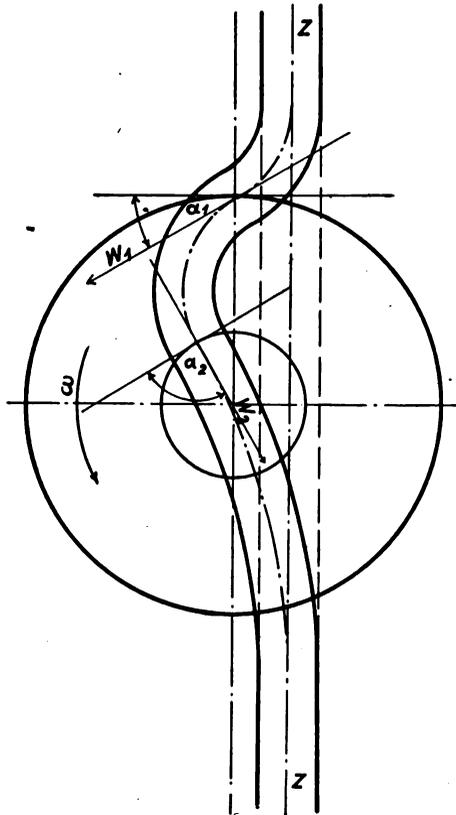


Fig. 115.

entspricht. Am Kanalausritte ergibt sich ein ähnlicher Betrag von

$$P_2 = \pm m \cdot \omega_2 \cdot \cos \alpha_2$$

bzw.

$$P_2 \cdot r_2 = \pm m \cdot r_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos \alpha_2$$

positiv oder negativ, je nachdem die Richtung der Auflagerreaktion mit der Drehrichtung zusammenfällt oder ihr entgegengesetzt ist. Die Summe der Auflagerreaktionen ergibt, bezogen auf die Gewichtseinheit der Arbeitsflüssigkeit, das Drehmoment nach Gleichung (9).

Wir haben damit das Problem der Kreisräder auf das des Krümmers mit stetiger Querschnittsänderung zurückgeführt und es sind nur noch die Gesichtspunkte zu erörtern, nach welchen diese Querschnittsänderung im Absolutkanale die günstigsten Verhältnisse ergibt.

Da wir es mit reibungs- bzw. wirbelbehafteter Strömung zu tun haben, müssen aus der zur Verfügung stehenden Gesamtenergie der Arbeitsflüssigkeit neben der durch Gleichung (8) definierten, an die Welle abgegebenen Leistung noch die in den durchströmten Kanälen und deren Anschlußstrecken auftretenden Reibungs- und Ablenkungsverluste gedeckt werden. Außerdem entläßt die Maschine die Arbeitsflüssigkeit mit einer Abflußgeschwindigkeit w_3 , der ein Arbeitsvermögen $\frac{w_3^2}{2g}$ pro Gewichtseinheit entspricht, welches als Austrittsverlust bezeichnet ebenfalls einen Teil der verfügbaren Gesamtenergie aufzehrt. Wenn wir die letztere mit H , dem Nettogefälle bzw. der manometrischen Förderhöhe, bezeichnen und sämtliche Verluste, die hydraulischen sowohl wie den Austrittsverlust, in Hundertsteln von H ausdrücken, so erhalten wir die Beziehung

$$L + (\alpha + \beta) \cdot H = H \dots \dots \dots (10)$$

bzw.

$$(\omega_1 \cdot \cos \alpha_1 r_1 - \omega_2 \cos \alpha_2 \cdot r_2) \omega = (1 - \alpha - \beta) g \cdot H \dots (11)$$

Bezeichnen wir noch $(1 - \alpha - \beta)$ mit ε , dem hydraulischen Wirkungsgrad, so erhalten wir

$$(\omega_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot r_1 - \omega_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot r_2) \omega = \varepsilon \cdot g \cdot H \dots (11a)$$

Um ε möglichst groß zu machen, muß der Verlustanteil α , bzw. der Austrittsgeschwindigkeitsanteil β der Gesamtenergie möglichst klein gehalten werden. Für das Leitrad ist diese Forderung nach unseren Ausführungen ohne Schwierigkeiten erfüllbar. Dagegen schließen sich die beiden Voraussetzungen für die Strömung im Absolutkanal gegenseitig aus. Geringer Austrittsverlust erfordert hier eine sehr beträchtliche Querschnittserweiterung des Absolutkrümmers, die bei der im allgemeinen beschränkten Länge des-

selben nur durch große Erweiterungswinkel mit entsprechend großen Umsetzungsverlusten erzielt werden kann. Umgekehrt ergibt eine günstige Erweiterung des Krümmers eine große, für die Nutzarbeit verlorene Austrittsgeschwindigkeit. Man umgeht diese Schwierigkeit in neuerer Zeit fast stets durch Einschaltung eines geraden oder gekrümmten Saugrohres zwischen Absolutkanalaustritt und Unterwassergraben. Diese Einrichtung, deren maximale (vertikale) Länge allerdings auf etwa 7 m beschränkt ist, ermöglicht es, die Arbeitsflüssigkeit mit entsprechend größerer Austrittsgeschwindigkeit aus dem Absolutkanal zu entlassen und dieselbe durch allmähliche Querschnittserweiterung im Saugrohr auf die zulässige Unterwassergeschwindigkeit unter Rückgewinnung einer äquivalenten Druckhöhe zu ermäßigen.

Wir können somit auch Absolutkanal und Saugrohr nach den uns bekannten Methoden für die günstigsten Arbeitsverhältnisse berechnen bzw. die in ihnen auftretenden Verluste zahlenmäßig bestimmen.

Haben wir den Absolutkanal in seiner Form und seinen Größenverhältnissen für die günstigsten Betriebsbedingungen festgelegt, so erübrigt noch die Rückführung der Absolutform auf die tatsächlich auszuführende Relativform — die Laufradzelle. Da sich hierbei an der Radbegrenzung selbst nichts ändert, besteht diese Aufgabe in der Aufzeichnung der Laufradschaufel, welchem Zwecke mit den Bezeichnungen der Fig. 113 die folgenden Beziehungen dienen:

$$r \cdot d\chi = r \cdot d\varphi - r \cdot \omega \cdot dt \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$d\chi = d\varphi - \omega \cdot dt \quad \dots \dots \dots (12a)$$

Um das Zeitelement zu eliminieren, dividieren wir durch dt und multiplizieren mit bzw. dividieren gleichzeitig durch ds und erhalten

$$\frac{d\chi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} - \omega \quad \dots \dots \dots (12b)$$

Für $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit ω eingesetzt und mit ds multipliziert lautet Gleichung (12b):

$$d\chi \cdot \omega = d\varphi \cdot \omega - \omega ds \quad \dots \dots \dots (12c)$$

bzw.

$$d\chi = d\varphi - \omega \cdot \frac{ds}{\omega} \quad \dots \dots \dots (12d)$$

Daraus

$$\chi = \int_0^{\varphi} d\varphi - \omega \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{w} = \varphi - \omega \int \frac{ds}{w} \quad \dots \quad (13)$$

wobei ω in Abhängigkeit von s bzw. s , w und φ nach Entwerfen des Absolutkanals als Funktionen von r gegeben sind. Wenn wir uns auf den Weg s_r im Relativkanal beziehen, was für die weiter unten folgende Besprechung der Verhältnisse bei nicht normalem Betriebe vorteilhaft erscheint, lautet Gleichung (13) auch

$$\chi = \varphi - \omega \cdot \int_{s_r}^{s_r^*} \frac{ds_r}{v} \quad \dots \quad (13a)$$

wobei s_r , der Weg im Relativkanal, und v , die Relativgeschwindigkeit, durch die Beziehung

$$v = f_1(s_r) \quad \dots \quad (14)$$

zusammenhängen.

Die Radbegrenzungen sind zweckmäßig als Rotationsflächen ausgeführt, deren Meridianschnitt im Falle der reinen Axial- bzw. Radialräder zur Drehachse normale oder parallele Gerade sind, im Falle der Radial-Axialräder (Francisräder) allgemein Kurven sind, die hinsichtlich der Radial-Axialbewegung, der sog. Hauptbewegung der Arbeitsflüssigkeit im Laufrad, der günstigsten, nach Gleichung (24) des IV. Abschnittes bestimmten Krümmernormen entsprechen. Da somit in den Francisrädern die Teilchen der Arbeitsflüssigkeit in doppelter Krümmung durch den Absolutkanal des Laufrades strömen müssen, ist eine Querschnittserweiterung des Absolutkanals nach Form 2. für diese Räder ausgeschlossen. Wir müssen uns daher mit einer möglichst verlustlosen Querschnittsänderung nach Form 3. begnügen. Bei den Schnellläuferturbinen, besonders bei denjenigen amerikanischer Bauart, ist dies wegen des geringen Eintrittsdurchmessers häufig nicht möglich und man ist gezwungen, die Erweiterung derart auszuführen, daß man dieselbe im ersten Teil des Absolutkanals — vom Kanaleintritt bis zum engsten Querschnitt im Meridianprofil — durch die Divergenz der Absolutschaufeln, im zweiten Teile des Absolutkanals hauptsächlich durch die Divergenz der Radwände bewirkt, wodurch die bekannte

charakteristische Form solcher Schnellläufferräder entsteht. (Fig. 116 und 117.)

Trotz des die Kontinuität der Strömung störenden Einflusses der bei der Drehbewegung des Laufrades am Eintrittsquerschnitte des Absolutkanales vorbeistreichenden Leitschaufelenden haben wir bisher die Strömung durch den Absolutkanal als stationär betrachtet. Unter Berücksichtigung dieses Einflusses ist demnach

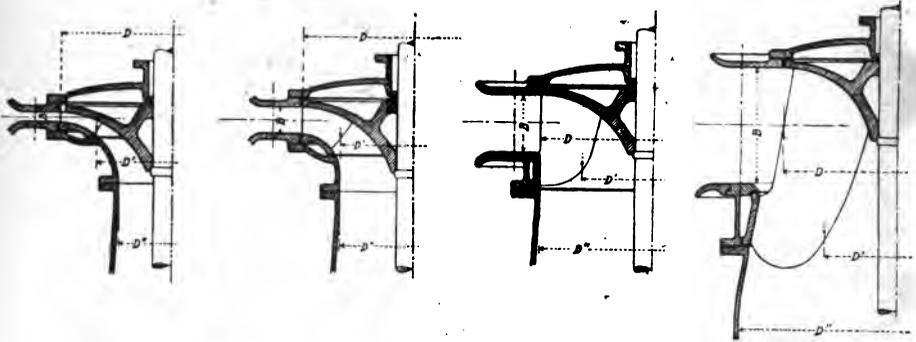


Fig. 116.

die Bewegung der Arbeitsflüssigkeit nur in den Leitradzellen dauernd stationär, im Absolutkanaleintritte hingegen periodisch

stationär, und zwar ist die Anzahl der bei einer Laufradumdrehung auftretenden Perioden des Bewegungszustandes gleich der Anzahl der Leitschaufeln. Innerhalb einer Periode schreitet die Störung im Absolutkanal mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω , entgegen der Drehrichtung fort und verschwindet, sobald der Absolutkanaleintrittsquerschnitt sich innerhalb zweier Leitschaufelenden be-



Fig. 117.

wegt. (Fig. 118 und 119.) Diese für die Energieumsetzung günstigste Lage wird sich über einen um so längeren Teil des Radumfanges einstellen, je größer die Zahl der Laufradschaufeln gegenüber der der Leitrad-schaufeln ist. Doch darf man mit diesem Zahlenverhältnisse mit Rücksicht auf vermehrte

Reibung in zu engen Kanälen des Laufrades bzw. auf die mangelhafte Wasserzuführung in zu weiten Leitzellen nicht zu hoch gehen. Da die Leitschaufelenden aus konstruktiven bzw. betriebstechnischen Rücksichten eine gewisse Stärke haben müssen, bilden sich bei ihrem Vorüberstreichen im Absolutkanal keilförmige

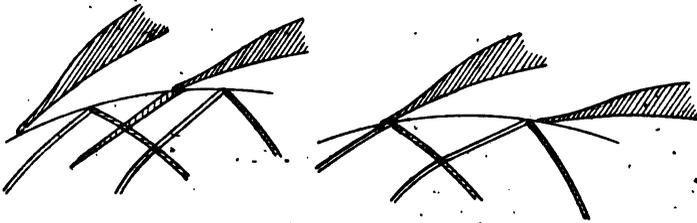


Fig. 118.

Wirbelräume mit diskontinuierlichen Strömungserscheinungen, die sich je nach der Größe der Eintrittsgeschwindigkeit und der Schärfe der Krümmung im Absolutkanal mehr oder weniger weit fortpflanzen, wie dies aus den weiter unten zu besprechenden Versuchen Pfarrs zu ersehen ist. Am wirksamsten sind diese

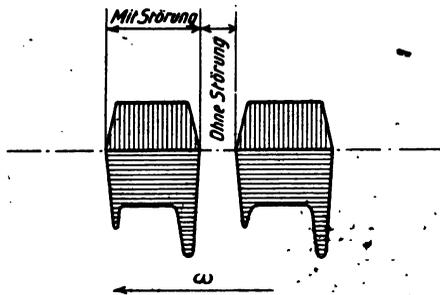


Fig. 119.

Wirbelräume unmittelbar vor oder hinter der Absolutschaufel, namentlich wenn der Absolutkanal auch nach der Seite der Schaufeln divergiert. Man macht daher mit Vorteil einen kurzen Teil des Kanalanges wirkungslos, indem man ihn aus parallelen Absolutschaufelenden bzw. Radwänden bildet. Dadurch hat die gestörte Strömung Zeit, ihren Gleichgewichtszustand wieder herzustellen, bevor sie den wirksamen (divergierenden) Teil des gekrümmten Kanals erreicht. Diese Parallelität der Schaufel-

enden am Kanaleintritt, gleich wie einer aus ähnlichen Gründen ausgeführten am Kanalaustritt, entspricht als Relativform die archimedische Spirale, nach welcher demnach die Schaufelenden der Laufrad- bzw. Leitrad-schaukeln zu formen sind. In der Praxis wird häufig aus Gründen der leichteren Herstellung im Modell anstelle der archimedischen Spirale die ihr ähnliche Kreisevolvente verwendet.

• Unsere bisherigen Betrachtungen setzten, abgesehen von der periodisch stationären Bewegung im Eintritte bzw. Austritte des Absolutkanals, einen vollkommenen Beharrungszustand der die Turbine durchströmenden Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit Q , des wirksamen Nettogefälles H und der Winkelgeschwindigkeit ω des Laufrades voraus. Für diesen Beharrungszustand als günstigstes Arbeitsverhältnis der Anlage sind unter Berücksichtigung der auftretenden Verluste die einzelnen Teile der Turbine bzw. Kreiselpumpe zu berechnen bzw. zu entwerfen. Ihm allein entspricht demnach die durch Gleichung (13) bestimmte Form der Laufradschaukel. Ändern nun im Betriebe eine oder mehrere der genannten Größen ihren Wert, so entsprächen der günstigsten Leistung unter den neuen Betriebsverhältnissen auch Änderungen in der Form und Größe der hydraulischen Organe der Maschine. Diese Änderungen sind aus konstruktiven und betriebstechnischen Gründen nur für die ortsfesten Kanäle und auch hier bloß teilweise ausführbar, nicht aber für die rotierenden Laufradschaukeln. Die Folge dieser mangelnden Übereinstimmung ist das Auftreten größerer Energieverluste und ein Sinken des Wirkungsgrades. Den Hauptanteil an diesen zusätzlichen Energieverlusten liefert der Stoßverlust, den die Arbeitsflüssigkeit beim Eintritt in den Absolutkanal erleidet, wenn die Neigung der Schaufelenden des letzteren von derjenigen der aus den Leitradzellen zuströmenden Flüssigkeitsteilchen abweicht. Weitere Verlustquellen sind dann die als Folge des Stoßes im Absolutkanale auftretenden Wirbel und Sekundärströmungen.

Wir nehmen zunächst den Neigungswinkel der Leitschaukelenden α_0 als unveränderlich an, während die Winkelgeschwindigkeit ω durch teilweise Entlastung der Turbine auf ω' angewachsen sein möge. Diesem Anwachsen der Winkelgeschwindigkeit entspricht aber auch eine größere Rotationsdruckhöhe $\frac{u_1'^2}{2g} > \frac{u_1^2}{2g}$ die in der Gefälleaufteilung bewirkt, daß die Leitradaustritts-

ergibt sich zunächst, daß die Richtung der Schaufelanfänge des Absolutkanals mit der Zuströmrichtung der Flüssigkeit nicht mehr übereinstimmt, sondern mit ihr den Winkel α_0' bildet. Wir haben demnach hier, im Sinne der Ableitungen des V. Abschnittes, eine Strömung im rechteckigen Knie vor uns, für die wir gemäß Gleichung (51) des V. Abschnittes den Energieverlust gefunden haben zu

$$E' = (1 - \cos \alpha_0') \frac{\omega_0'^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Hierzu tritt nun noch ein vermehrter Ablenkungs- bzw. Lösungsverlust im Absolutkrümmer, welcher letzterer hinsichtlich Krümmung und Querschnittserweiterung nicht mehr der für Normalbetrieb ausgebildeten günstigsten Form entspricht. Er berechnet sich gemäß Gleichung (31) des IV. Abschnittes zu

$$E'' = k_2 \cdot (x^2 - 1) \frac{\omega_0'^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

wobei x die aus der Zeichnung zu bestimmende Einschnürungszahl und k_2 ein Faktor, größer als 1 ist. Ein weiterer, wenn auch geringer Energieverlust ist dadurch bedingt, daß die aus dem Leitrade mit der Geschwindigkeit ω_0' zuströmenden Flüssigkeitsteilchen im Eintritte des Absolutkanals auf $\frac{\omega_0'}{\cos \alpha_0'}$ beschleunigt werden müssen, so daß sich nach Gleichung (40) des V. Abschnittes ein Verlust ergibt von

$$E''' = \left(\frac{1 - \cos \alpha_0'}{\cos \alpha_0'} \right)^2 \cdot \frac{\omega_0'^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Dieser Verlust ist indessen bei den praktisch vorkommenden kleinen Winkeln α_0' so gering, daß wir ihn in unserer Rechnung unbedenklich vernachlässigen können. Er beträgt z. B. für $\alpha_0' = 20$, $E''' = 0,004 \frac{\omega_0'^2}{2g}$. Die durch die Änderung der Betriebsverhältnisse bedingten hydraulischen Verluste betragen demnach insgesamt

$$E = E' + E'' = (1 - \cos \alpha_0' + k_2 (x^2 - 1)) \frac{\omega_0'^2}{2g} = (1 - \xi) \frac{\omega_0'^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

wobei ξ gleich ist

$$\xi = \cos \alpha_0' - k_2 (x^2 - 1) \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

Bezeichnen wir den maximalen, der Winkelgeschwindigkeit ω zugeordneten Wirkungsgrad mit η , so bestimmt sich der Wirkungsgrad η' für ω' aus der Beziehung

$$\eta' H = \eta H - (1 - \xi) \frac{\omega_0'^2}{2g} \dots \dots \dots (20)$$

zu

$$\eta' = \eta - \frac{1 - \xi}{H} \cdot \frac{\omega_0'^2}{2g} \dots \dots \dots (20a)$$

Nun stehen aber die Winkelgeschwindigkeit ω und die Leitradaustrittsgeschwindigkeit ω_0 für konstantes H in einem gewissen Zusammenhang. Für normalen Betrieb und für senkrechten Austritt der Arbeitsflüssigkeit aus dem Laufrade — $\alpha_2 = 90^\circ$ — wird mit $\omega_0 = \omega_1$ gemäß Gleichung (11 a)

$$\omega_0 \cos \alpha_0 = r_1 \cdot \omega = \sqrt{\eta \cdot g \cdot H} \dots \dots \dots (11b)$$

bzw.

$$\frac{r_1^2 \omega^2}{2g} = \frac{\eta}{2} \cdot H \dots \dots \dots (11c)$$

bzw.

$$\eta = 2 \frac{r_1^2 \omega^2}{2g} \cdot \frac{1}{H} \dots \dots \dots (11d)$$

Aus einer ähnlichen Überlegung folgt

$$\frac{\omega_0'^2}{2g} = \frac{1}{2 - \xi} \cdot \left(\eta H - \frac{r_1^2 \omega'^2}{2g} \right) \dots \dots \dots (21)$$

Durch Verbindung von Gleichung (21) mit Gleichung (20a) erhalten wir

$$\eta' = \frac{1}{2 - \xi} \cdot \eta + \frac{1 - \xi}{2 - \xi} \cdot \frac{r_1^2 \omega'^2}{2g \cdot H} \dots \dots \dots (20b)$$

Aus Gleichung (20b) ergibt sich, abgesehen von der Veränderlichkeit der Größe ξ , eine parabolische Änderung des Wirkungsgrades mit der Winkelgeschwindigkeit.

An der Eintrittskante der Absolutschaufel tritt durch die Richtungsänderung der Leitradaustrittsgeschwindigkeit ein Druck (Stoß) auf die Absolutschaufel auf, der sich nach Gleichung (24) des V. Abschnittes berechnet zu

$$P_s = \frac{1}{g} \omega_0' \cdot \sin^2 \alpha_0' \dots \dots \dots (23)$$

mit einer tangentiellen Komponente

$$P_s^t = \frac{1}{g} \omega_0' \cdot \sin^2 \alpha_0' \cdot \cos \alpha_0, \quad \dots \quad (23a)$$

welcher im Halbmesser r_1 ein Drehmoment entspricht von

$$M_p = -\frac{1}{g} \cdot r_1 \omega_0' \sin^2 \alpha_0' \cdot \cos \alpha_0 \quad \dots \quad (24)$$

Damit und mit $\omega_1' = (\omega_0' : \cos \alpha_0')$ bestimmt sich das Drehmoment des Laufrades zu

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1}{g} \left(r_1 \cdot \frac{\omega_0' \cdot \cos(\alpha_0 - \alpha_0')}{\cos \alpha_0'} - r_2 \omega_2' \cdot \cos \alpha_2' - \right. \\ &\quad \left. - r_1 \omega_0' \sin^2 \alpha_0' \cdot \cos \alpha_0 \right) \quad \dots \quad (25) \\ &= \frac{1}{g} (r_1 [\omega_0' \cdot \cos \alpha_0'] \cdot \cos \alpha_1' - r_2 \omega_2' \cdot \cos \alpha_2') \end{aligned} \right\}$$

Sein Wert ist demnach ebenso groß, als wenn die Flüssigkeit stoßfrei mit der Geschwindigkeit $\omega_0' \cdot \cos \alpha_0'$ in den Absolutkanal eingetreten wäre. Die an das Rad abgegebene Leistung ergibt sich zu

$$L' = M \omega' - \frac{1}{g} \omega' (r_1 [\omega_0' \cos \alpha_0'] \cos \alpha_1' - r_2 \omega_2' \cdot \cos \alpha_2'). \quad (26)$$

Sie muß gleich sein

$$L' = \eta' H = \frac{1}{2 - \xi} \eta \cdot H + \frac{1 - \xi}{2 - \xi} \cdot \frac{r_1^2 \omega'^2}{2g} \quad \dots \quad (27)$$

bzw. die Leistungsverminderung gegenüber dem Normalbetrieb

$$L - L' = (\eta - \eta') H = \frac{1 - \xi}{2 - \xi} \cdot \left(\eta H - \frac{r_1^2 \omega'^2}{2g} \right) \quad \dots \quad (28)$$

Bei gleichbleibender Höhe H und Leitschaufelwinkel α_0 steht somit auch die Leistung pro Gewichtseinheit der Arbeitsflüssigkeit in parabelähnlicher Beziehung zur Umfangsgeschwindigkeit. Eine analoge Betrachtung ergibt sich für Turbinen mit Drehschaufelregulierung, System Fink, bei denen mit $\omega = \text{konstant}$ sowohl Wassermenge und Leitradaustrittsgeschwindigkeit als auch der Leitschaufelwinkel verändert wird.

Hier tritt bei Verminderung der Normalfüllung neben einer durch die Stoßwirkung am Absolutkanaleintritte bedingten positiven Arbeitskomponente auch noch eine Verminderung des Austrittsverlustes sowie die für die Energieumsetzung günstige Erscheinung auf, daß die inneren Stromschichten im Absolutkrümmer, ähnlich wie im Kreiskrümmer, infolge der Einschnürung des Strahles größere Geschwindigkeiten annehmen als die außen strömenden. Dieser Verschiedenheit der Geschwindigkeiten zu beiden Seiten der Schaufel entsprechen zusätzliche Druckunterschiede zu beiden Seiten der Schaufel, die das Arbeitsvermögen des Betriebswassers vermehren. Es besteht demnach innerhalb des mit Stoßeintritt arbeitenden Betriebsbereiches ein Gebiet, in welchem die für die Arbeitsabgabe günstigen Strömungserscheinungen die ungünstigen der Stoß- und Wirbelverluste überwiegen. Dies bewirkt — durch die praktische Erfahrung schon lange bestätigt —, daß der höchste Wirkungsgrad bei Drehschaufelregulierung nicht bei stoßfreiem Eintritte bzw. normaler Füllung, sondern bei einer etwas kleineren Füllung auftritt. (Fig. 121.)

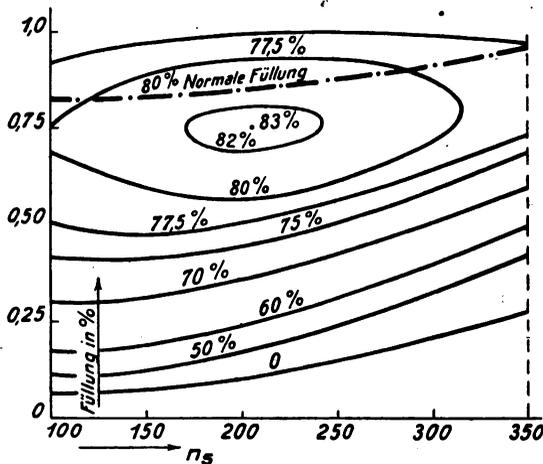


Fig. 121.

Form und Verlauf der Radprofile bzw. der Schaufelflächen können nun unter Berücksichtigung der von uns abgeleiteten Bedingungen für den Querschnittsverlauf nach irgend einer der bekannten Darstellungsmethoden, wie z. B. der der konformen

Abbildung, konstruiert werden. Die einschlägigen Verhältnisse sollen an besonderer Stelle eingehende Behandlung finden.

Um über den Verwendungsbereich einer Turbine mit bestimmten Konstruktionsdaten Aufschluß zu gewinnen, brauchen wir uns nur zu überlegen, daß alle Turbinen mit identischer Charakteristik auch identische Absolutkanäle haben müssen, sowohl für den stoßfreien Gang wie für alle aus der Änderung der stoßfreien Geschwindigkeiten resultierenden Betriebsverhältnisse. Wir haben demnach für den Turbinensatz bei konstantem Winkel der Leitschaufelenden, $\alpha_0 = \text{konstant}$, gemäß Gleichung (13) die Beziehung

$$\varphi - \chi = \omega \cdot \int \frac{ds}{\omega} = \text{konst.} \quad \dots \quad (29)$$

Wird die Erweiterung des Absolutkanals nach Form 2. durchgeführt, so besteht gemäß Gleichung (1) des II. Abschnittes zwischen s und ω der Zusammenhang

$$\omega \cdot s = \text{konstant} \quad \dots \quad (30)$$

bzw.

$$ds = - \frac{k_1 \cdot d\omega}{\omega^2} \quad \dots \quad (31)$$

Damit geht Gleichung (29) über in

$$\omega \int \frac{ds}{\omega} = - \omega \cdot k_1 \int \frac{d\omega}{\omega^3} = k \quad \dots \quad (29a)$$

Daraus

$$\omega = k_2 \cdot \omega^2 \quad \dots \quad (32)$$

Nun ist ω proportional der Tourenzahl n , ω^2 proportional einmal dem Quadrate der Wassermenge Q , anderseits dem Nettogefälle H . Es lassen sich daher aus Gleichung (32) die zwei weiteren Gleichungen ableiten:

$$n = k_3 \cdot Q^2 \quad \dots \quad (32a)$$

$$n = k_4 \cdot H \quad \dots \quad (32b)$$

daraus die Bedingungsgleichung

$$\frac{Q^2}{H} = \text{konst.} \quad \dots \quad (33)$$

für $H = 1$ m ist

$$Q_1^2 = \frac{Q^2}{H} \quad \dots \quad (33a)$$

bzw.

$$Q = Q_1 \cdot \sqrt{H} \quad \dots \quad (33b)$$

Ebenso entspricht die Wassermenge Q , bei der Höhe $H = 1$ m, eine Tourenzahl n_1 , so daß sich allgemein aus Gleichung (32a) ergibt

$$n_1 = \frac{n}{\sqrt{H}} \quad \dots \quad (34)$$

Damit wird für die an der Turbinenwelle abgegebene Leistung

$$L = L_1 \cdot H \cdot \sqrt{H} \quad \dots \quad (35)$$

Folgt die Erweiterung des Absolutkanals der Form 3., so gilt für die Beziehung zwischen s und ω gemäß Gleichung (24) des II. Abschnittes der Ansatz

$$\omega \cdot s^2 = \text{konstant} \quad \dots \quad (36)$$

Daraus

$$s = \frac{k_1}{\sqrt{\omega}} \quad \dots \quad (36a)$$

bzw.

$$ds = -\frac{k_2 d\omega}{\sqrt{\omega^3}} \quad \dots \quad (36b)$$

In Verbindung mit Gleichung (29) ergibt sich

$$-\omega \cdot k_2 \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^3}} = \text{konst.} \quad \dots \quad (37)$$

bzw. integriert

$$\omega = \text{konst} \cdot \omega^{1/2} \quad \dots \quad (37a)$$

Daraus wieder

$$\frac{Q^2}{H} = \text{konstant} \quad \dots \quad (37b)$$

Die Beziehungen für den Turbinensatz sind demnach von der Form der Kanalerweiterung unabhängig.

Sämtliche im vorhergegangenen für die Turbine durchgeführten Ableitungen sind in sinngemäßer Anwendung auch für die Kreiselpumpe bzw. Schiffsschraube gültig.

B. Versuche zur Theorie der Kreiselräder.

1. Versuche des Verfassers.

Zwecks Feststellung der Verlustwerte bei Strömung des Wassers durch erweiterte Krümmer, konstruierte der Verfasser die in Fig. 109, 110 und 111 dargestellten Krümmerformen. Dieselben wurden in die im IV. Abschnitt 2 b) beschriebene Versuchsvorrichtung eingebaut und die vor und nach dem Durchlaufen der Krümmung auftretenden Druckhöhen in Metern Wassersäule gemessen. Die mittlere Stromgeschwindigkeit im Krümmereintritte bzw. die sekundliche Wassermenge, das Erweiterungsverhältnis $n = \frac{F_2}{F_1}$, und der Erweiterungswinkel $2\alpha_0 = 12^\circ$ waren bei allen drei Versuchen gleich, so daß die Verluste, ausgedrückt in Prozenten der Geschwindigkeitshöhe im Krümmereintritte, einen guten Vergleich der Wirkungsgrade der Energieumsetzung in den drei Krümmerarten ermöglichen.

Es fand sich der Verlust in Form 1. zu

$$E' = 0,49 \frac{\omega_1^2}{2g},$$

in Form 2. zu

$$E'' = 0,06 \frac{\omega_1^2}{2g},$$

und in Form 3. zu

$$E''' = 0,18 \frac{\omega_1^2}{2g},$$

womit die Überlegenheit der Krümmerform 2. bewiesen erscheint.

Die Krümmung der Begrenzungswand in Form 2. entsprach der nach Gleichung (24) des IV. Abschnittes bestimmten günstigsten Form bei günstigstem Krümmungsverhältnisse $-\frac{D}{R_m} = 0,4$. In Form 1. und 3. waren die Krümmermittellinien nach dieser Gleichung konstruiert.

Nach approximativen Druck- bzw. Geschwindigkeitsmessungen längs der Krümmerachse scheint in Form 1. die ungünstige Wirkung hauptsächlich darin begründet, daß der Strom als isolierter Strahl vom Krümmereintritte durch die Krümmung fließt und erst im letzten Drittel derselben unter Stoß, wie bei

Fig. 1. Allgemeiner Aufbau.
Maßstab 1 : 33,3.

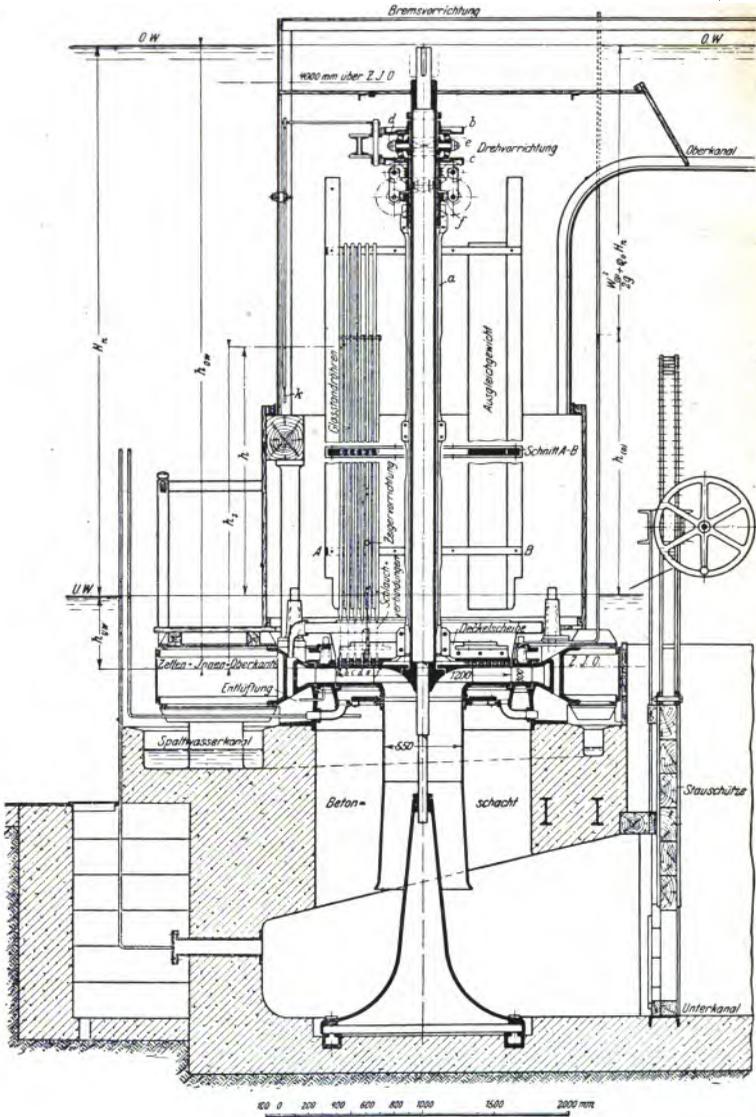


Fig. 122.

dieser Versuchsreihe mit Rücksicht auf unsere theoretischen Ableitungen einer näheren Betrachtung unterziehen.

Fig. 124 zeigt die aus den Abmessungen des Schaufelplanes (Fig. 123) bzw. mit vorstehenden Betriebsdaten berechnete bzw.

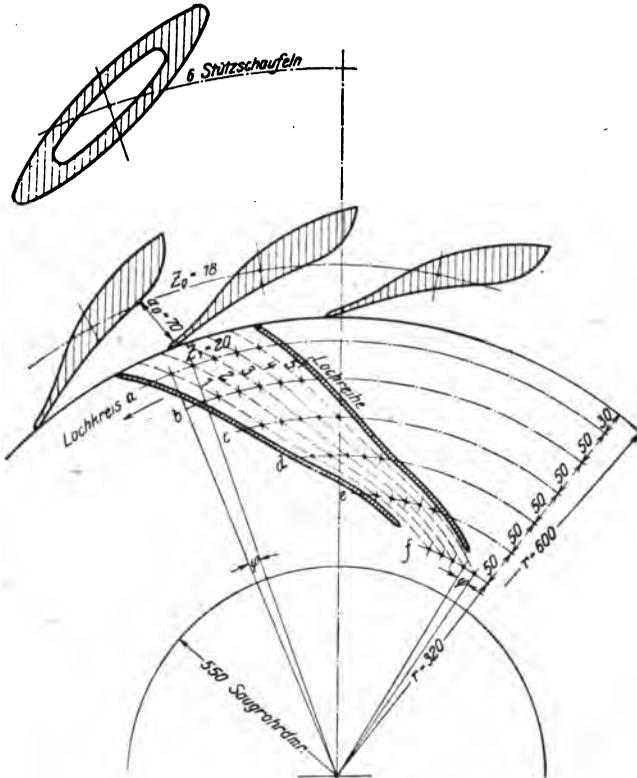


Fig. 123.

konstruierte Form des Absolutkanals. Die Lochreihen und Lochkreise des Relativkanals sind in die Absolutform übertragen und die aus der Tabelle bzw. den Diagrammen (Fig. 125) entnommenen Angaben der gemessenen Druckhöhen den einzelnen Meßpunkten beigeschrieben.

Wir sehen zunächst, daß die Schaufelanfänge des Absolutkanals mit der Richtung der Leitschaufelenden einen Winkel

bilden, so daß der Eintritt des Betriebswassers ins Laufrad mit Stoß verbunden ist, während die Austrittsenden der Absolutschaufeln nahezu radial verlaufen. Die Form des erweiterten Krümmers entspricht ungefähr der ungünstigsten Art. (Form 1 nach Fig. 109.)

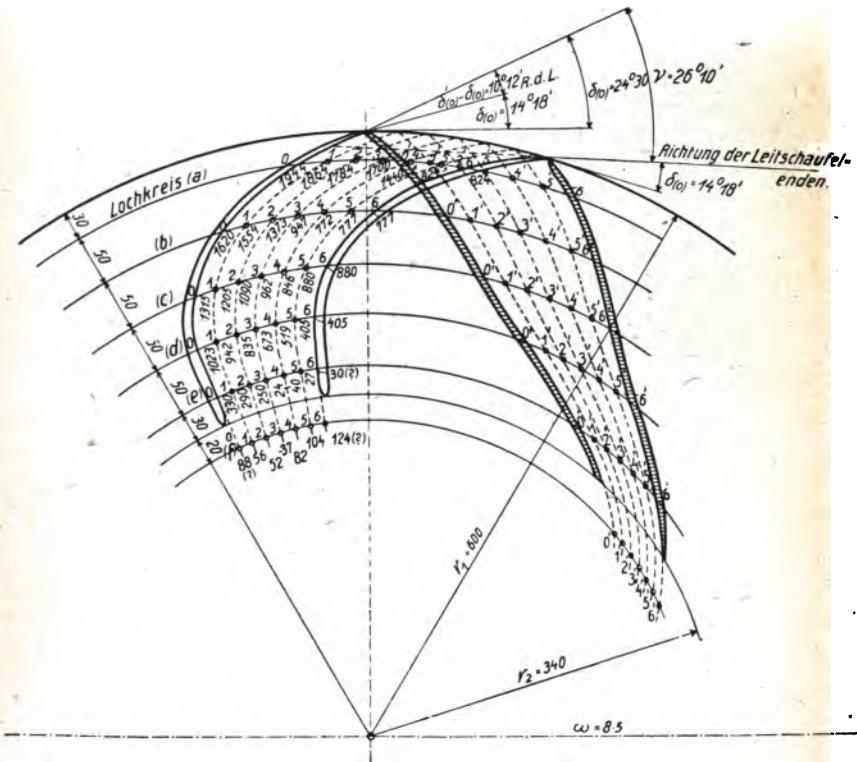


Fig. 124.

Der Spaltdruck beträgt $h_{sp} = 1720$ mm, die Geschwindigkeitshöhe der Leitradaustrittsgeschwindigkeit $\frac{\omega_{(0)}^2}{2g} = 1530$ mm, so daß in der Zuleitung des Betriebswassers vom Oberwasserkanal bis Leitradaustritt ein Gesamtreibungsgefälle von $\varrho_0 H_n$

$$\varrho_0 H_n = H_n - h_{sp} - \frac{\omega_{(0)}^2}{2g} = 487 \text{ mm}$$

aufgezehrt worden ist, woraus sich ϱ_0 zu $\varrho_0 = 0,13$ bestimmt. Im Spalt gehen nach den Versuchsmessungen etwa $0,04 Q$ ohne Arbeitsleistung als Spaltwasserverlust verloren. Die Zentrifugaldruckhöhe im Laufradeintritte h_{n1} ist gleich

$$h_{n1} = h_2 + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} = 50 + 950 = 1000 \text{ mm,}$$

so daß zur Überwindung der Bewegungswiderstände im Laufrade $\varrho_1 H_n$ der Betrag von

$$\varrho_1 \cdot H_n = h_{sp} - h_{n1} = 720 \text{ mm}$$

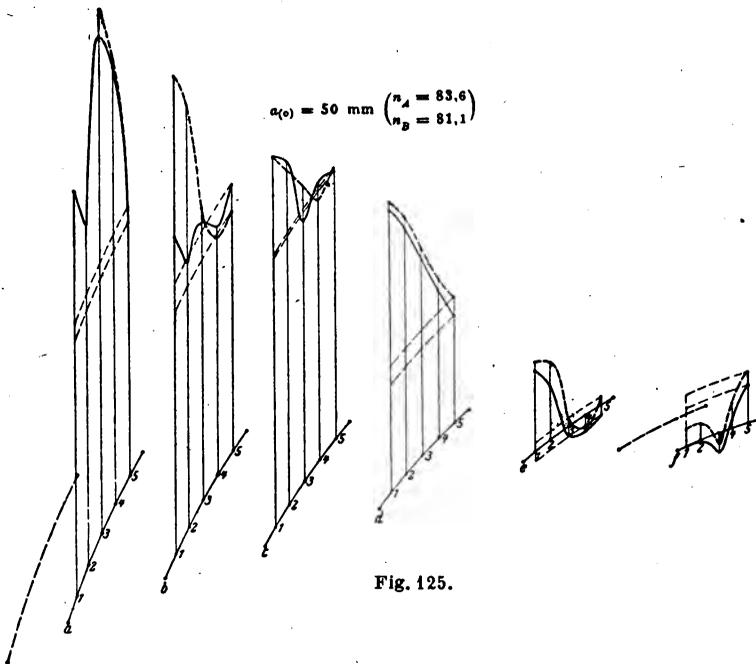


Fig. 125.

zur Verfügung steht bzw. verbraucht wird. Daraus berechnet sich ϱ_1 zu $\varrho_1 = 0,193$. In Prozenten der Geschwindigkeitshöhe im Laufradeintritte ausgedrückt, beträgt dieser Verlust $\varrho_1 H_n = 0,47 \frac{\omega^2}{2g}$ ein Wert, der mit dem vom Verfasser in den oben angeführten Versuchen ermittelten Verlustwerte für den erweiterten Krümmer (Form 1., Fig. 109) in guter Übereinstimmung steht.

Die Verschiedenheit der Richtungswinkel im Laufradeintritte ergibt einen Stoßverlust, der sich nach früherem berechnet zu

$$h_{st} = \xi \frac{w_{(0)}^2}{2g} = \{1 - \cos(\delta_0' - \delta_0)\} \frac{w_{(0)}^2}{2g} = 25 \text{ mm}$$

so daß der Druck im Schaufeleintritte selbst gleich ist

$$h_1 = h_{sp} - h_{st} = 1695 \text{ mm}$$

Da die Krümmungsverhältnisse des Absolutkanals nicht den günstigsten nach Gleichung (24) des IV. Abschnittes entsprechen, erfolgt, ähnlich wie im Kreiskrümmen, Einschnürung des Strahles unter Erhöhung der mittleren Stromgeschwindigkeit. Aus den der Zeichnung entnommenen Abmessungen und Winkeln berechnet sich diese Einschnürungszahl zu

$$\alpha = 0,925; \quad \alpha' = \frac{1}{\alpha} = 1,08.$$

Die mittlere Stromgeschwindigkeit beträgt demnach $w_{(0)'} = 1,08 w_{(0)}$.

Der Ablenkungsdruck $\frac{\Delta P}{\gamma}$ der strömenden Flüssigkeit auf die Krümmeraußenwand berechnet sich nach Gleichung (15) des IV. Abschnittes für die einzelnen Stromstrecken zwischen den Lochkreisen und unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsänderungen über den Stromquerschnitt. Es ist z. B. für die Meßpunkte des Lochkreises (α)

$$\begin{array}{ll} \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_0) = 440 \text{ mm} & \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_3) = 195 \text{ mm} \\ \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_1) = 364 \text{ mm} & \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_4) = 90 \text{ mm} \\ \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_2) = 282 \text{ mm} & \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_5) = 0 \\ & \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_6) = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_0) \\ \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_1) \\ \frac{\Delta P}{\gamma} (\alpha_2) \end{array}} \right\} \text{Wirbelzone.}$$

Verteilen wir noch den Radverlust gleichmäßig auf die Stromstrecken zwischen Laufradeintritt und Laufradaustritt — demnach $\frac{720}{5.5} = 126 \text{ mm}$ pro Lochkreisentfernung — und beachten wir, daß das Wasser beim Durchströmen des Kanals sowohl an Zentrifugaldruckhöhe verliert, als auch — infolge der Krümmererweiterung — statischen Druck aufnimmt, so können wir auf

Grund unserer Ableitungen die Versuchsergebnisse hydrodynamisch zu deuten versuchen.

Es herrschen die folgenden Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse:

1. Im Laufradeintritte: Abgesehen vom Einflusse des Eintrittsstoßes (siehe oben) und dem der Leitschaufelenden ist sowohl der Druck als auch die Geschwindigkeit über den ganzen Kanaleintritt konstant. Da die Schaufelenden als Evolventen ausgeführt sind, findet unmittelbar hinter dem Kanaleintritte keine Ablenkung und daher auch keine Änderung des Druckes bzw. der Geschwindigkeit statt. Die Wanddrücke zu beiden Seiten der Schaufelenden sind einander gleich und entgegengesetzt gerichtet, so daß keinerlei Arbeitsabgabe an dieser Stelle stattfindet. (Arbeitsfreie Schaufelenden!)

2. Im Lochkreise (a): Hier hat die Entwicklung der Ablenkungsdrücke und der durch die Einschnürung bedingten Geschwindigkeitsänderungen in den einzelnen Stromschichten von innen nach außen schon begonnen (siehe Fig. 126). An der Innen-

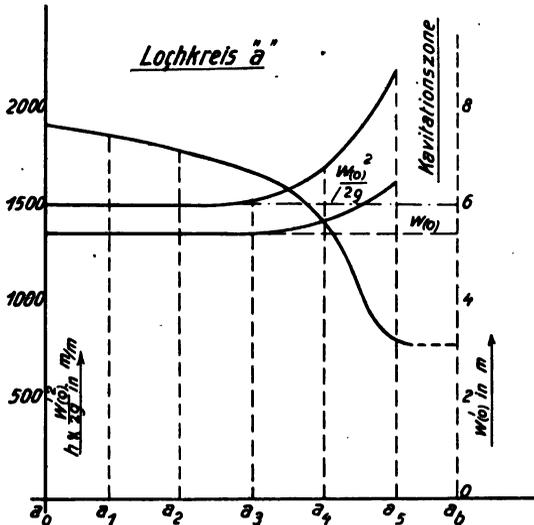


Fig. 126.

seite des Krümmers ist die gesamte statische Druckenergie in Geschwindigkeitsenergie umgesetzt worden. Zwischen a_5 und der Krümmerrinnenwand besteht eine Wirbelzone mit Rückströ-

mung und Wirbelbewegung, in der das Wasser den durch die Rotation des Rades bedingten Zentrifugalüberdruck (über den, der im Austrittsquerschnitte auftritt) annimmt. Auf dem Wege vom Kanaleintritte bis zum Lochkreise (a) hat der Druck einerseits um die Differenz der Zentrifugaldruckhöhen $\frac{u_1^2 - u_a^2}{2g} = 128$ mm und um den dieser Stromstrecke entsprechenden Teil des Lauf-
radverlustes $\rho_1^{(1-a)} = 0.5 \frac{\rho_1}{5.5} = 63$ mm, also insgesamt um 191 mm abgenommen, andererseits durch das Auftreten der Ablenkungsdrücke, wie oben angegeben, zugenommen. Danach lassen sich die Druckhöhen in jedem Meßpunkte berechnen. Wo die tatsächlich gemessenen Druckhöhen kleiner sind als die rechnungsmäßigen, muß Druck in Geschwindigkeit umgesetzt worden sein, so daß sich aus diesen Unterschieden auch die Geschwindigkeitsverhältnisse im Lochkreise ergeben.

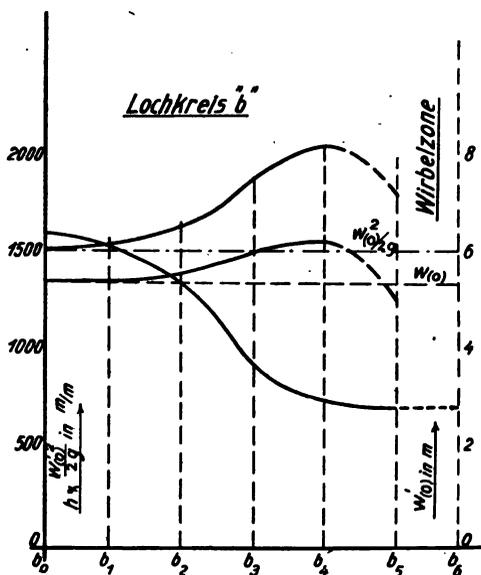


Fig. 127.

3. Im Lochkreise (b): Die ungleiche Geschwindigkeits- und Druckverteilung erstreckt sich hier bereits über den ganzen Meßbereich des Lochkreises. Sonst sind die Verhältnisse ähnlich wie in (a). (Fig. 127.)

4. Im Lochkreise (c): Hier hat die mittlere Strömungsgeschwindigkeit unter dem Einflusse der Querschnittserweiterung

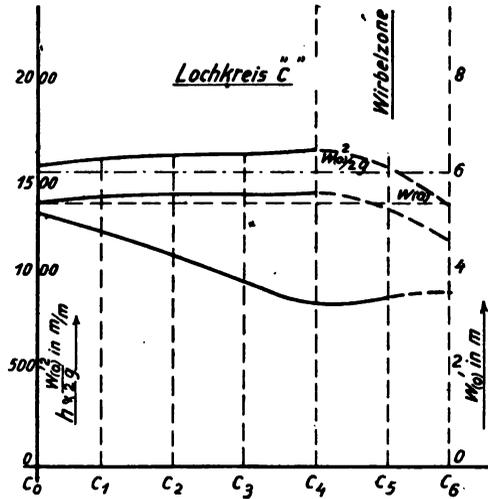


Fig. 128.

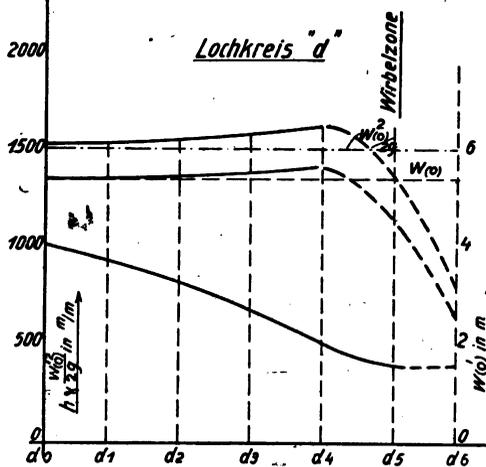


Fig. 129.

etwas abgenommen, namentlich gegen die Innenseite des Krümmers zu. (Siehe Fig. 128.)

5. Im Lochkreise (d): Die Verhältnisse sind hier ähnlich wie im Lochkreise (c). (Fig. 129.)

6. Im Lochkreise (e): Hier tritt das in den Versuchsdiagrammen Bánkis¹⁾ so scharf ausgeprägte Wandern der Höchstgeschwindigkeit von der Innenseite des Krümmers gegen die Ausströmkante hin ein, unter gleichzeitiger Verminderung der Ablenkungsdrücke, verstärkter Wirbelbewegung an der Krümmersinnenseite und Strahlzersplitterung (negative Drücke). (Siehe Fig. 130.)

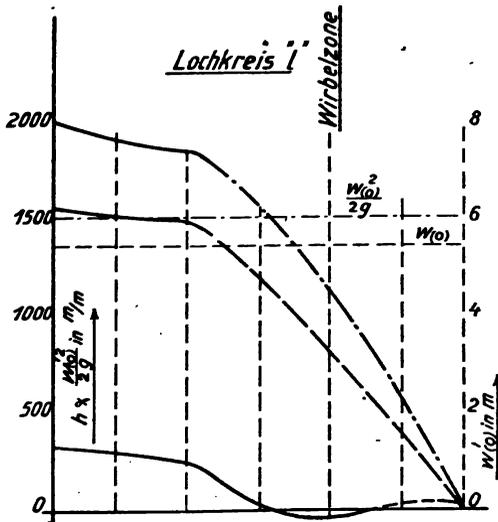


Fig. 130.

7. Im Lochkreise (f): Unmittelbar hinter dem Laufradaustritte strömt das Wasser ungefähr so wie es Bánkis Versuchskrümmer (Fig. 66) zeigt. Die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse sind ähnlich wie in (e), doch hat die Hauptmasse des Strahles trotz der radial gerichteten Schaufelenden eine Neigung in der Drehrichtung des Rades, so daß hinter jeder Austrittskante sich die einander benachbarten Kanalströme nur unter Stoß bzw. unter Druckerhöhung vereinigen können. (Siehe daher den relativ hohen Druck an der Innenseite des Strahles in Fig. 131.)

Aus den Druckhöhen- und Geschwindigkeitswerten ist zu ersehen, daß die Krümmenerweiterung im Falle der Versuchsturbine

¹⁾ Siehe Fig. 67 bis 70, IV. Abschnitt, S. 94.

nur eine ganz geringe Druckerhöhung bzw. Geschwindigkeitsverminderung im Querschnitte zur Folge hatte. Der größte Teil dieses Energieumsatzes findet erst nach dem Durchströmen der Schaufel im Übergangsraume zum Saugrohre statt.

Wollen wir die Verhältnisse in einem der Stromquerschnitte betrachten, so erhalten wir letztere als auf der Krümmerrachse senkrecht stehende Zylindermantelflächen, die ihre Achse in der

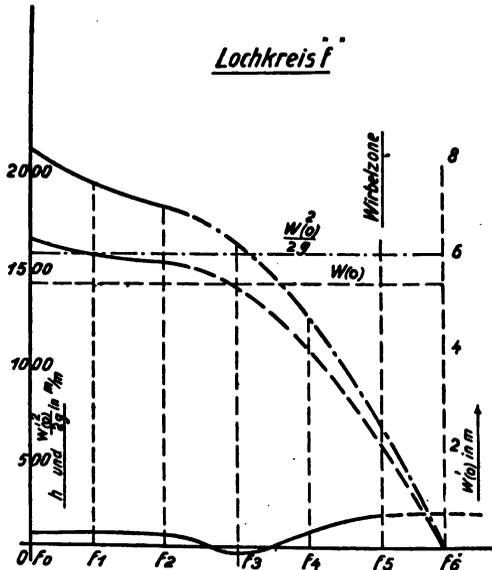


Fig. 131.

Schnittlinie der ausgestreckten Absolutschaufeln haben. Der Einfachheit halber können sie ohne großen Fehler durch ebene Schnitte senkrecht zur Krümmerrachse ersetzt werden.

Daß der Einfluß der Leitschaufelenden auf die Strömung in den vorbeistreifenden Laufzellen tief ausgeprägt ist und weit in das Innere des Absolutkanals hineinreicht, zeigt die von Pfarr aufgenommene Versuchsreihe (Fig. 125), wobei die Stellung der Leitschaufelenden gegenüber den einzelnen Meßpunkten im Augenblicke der Messung in Fig. 132 und 133 angedeutet ist. Bei spitz zugeschärften Leitschaufelenden, wie sie auch die Versuchsturbine hatte, ist aber der keilförmige Wirbelraum und der Stoßwinkel der ihn umhüllenden Stromteilchen so klein, daß dieser

Einfluß im Gegensatz zur Ansicht Pfarrs keine merkbare Änderung des Energieinhaltes der Gesamtströmung und insbesondere der Differenz der Wanddrücke hervorzurufen vermag. Längs des

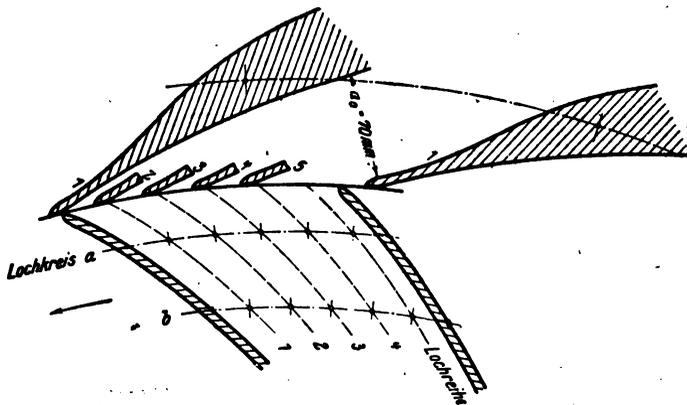


Fig. 132.

Keilraumes werden die Wasserteilchen momentan beschleunigt, wodurch die starke Drucksenkung an der betreffenden Stelle ent-

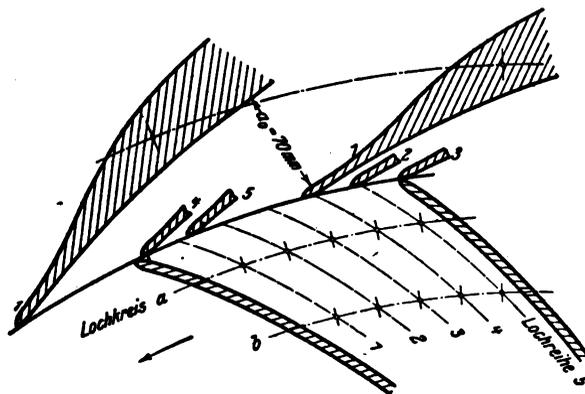


Fig. 133.

steht. Diese vermehrten Stromgeschwindigkeiten vermehren aber auch wieder das auf die Radschaufeln ausgeübte Drehmoment, so daß der resultierende Energieverlust unmerklich klein wird. Betrachten wir z. B. die Absolutschaufel (Fig. 132) in dem Augen-

blicke, wo das ihr entgegenkommende Leitschaufelende im nach vorne benachbarten Kanale eine übernormale Drucksenkung hervorruft, so wird im gleichen Augenblicke durch die vermehrte Druckdifferenz zu beiden Seiten der Absolutschaufel auch ein vermehrtes Drehmoment auf dieselbe ausgeübt und dadurch das Arbeitsvermögen des Betriebswassers momentan vergrößert. Im nächsten Zeitelement ist nun dasselbe Leitschaufelende hinter die Absolutschaufel getreten und hat dort eine lokale Drucksenkung hervorgerufen, während sich vor der Schaufel wieder der Normaldruck eingestellt hat. Es wird daher jetzt, im Gegensatz zu früher, momentan eine kleinere Druckdifferenz, ein kleineres Drehmoment und verminderte Arbeitsabgabe des Betriebswassers gegeben sein, die, falls diese Erscheinungen zu beiden Seiten der Schaufel in gleicher Intensität auftreten, einander vollständig kompensieren. Nun liegt es aber in der Natur der nach außen drängenden Strömung im Krümmer, daß eine Störung an der Krümmerinnenseite dortselbst einen größeren Druckabfall hervorruft, als eine gleichartige Störung an der Krümmeraußenwand. (Siehe Fig. 118.) Wir erhalten daher durch die Wirkung der Leitschaufelenden einen Überschuß an Arbeitsvermögen, der die durch die Störung hervorgerufenen Wirbelverluste zum größten Teile ausgleicht. Diese Erscheinung ist periodisch mit der Winkelgeschwindigkeit des Laufrades und mit der Anzahl der Leitschaufeln. Damit nicht um den Laufradumfang die Störung in allen Laufradzellen gleichzeitig mit der größten Stärke auftritt und dadurch Schwingungen im Gange der Turbine hervorruft, macht man zweckmäßig die Zahl der Leitschaufeln etwas kleiner als die der Laufradschaufeln. Damit erscheint die auch aus der praktischen Erfahrung sich ergebende Belanglosigkeit des Einflusses der Leitschaufelstörung auf den Wirkungsgrad der Turbine erklärt.

Zur Auswertung seiner Versuchsergebnisse hat Pfarr die Wanddrücke in der Drehrichtung und entgegengesetzt aus den Versuchsdiagrammen durch Extrapolation bestimmt, die Drücke längs der Schaufelfläche mit dem Hebelarm in bezug auf die Turbinenachse und mit dem zugehörigen Flächenelemente selbst multipliziert und durch graphische Addition das Integral aller Teilmomente gebildet:

$$M_v = \gamma \cdot b_1 \int_{l=0}^{l=l_1} h_v \cdot r_v \cdot dl_1$$

für das Vorwärtsmoment, und

$$M_r = \gamma \cdot b_1 \int_{l=0}^{l=l_1} h_r \cdot r_r \cdot dl_1$$

für das Rückwärtsmoment. Als Differenz der beiden ergab sich das resultierende Drehmoment zu

$$M = M_v - M_r = 179,5 \text{ mkg}$$

bzw. mit

$$\omega = \frac{\pi \cdot 82,3}{30} = 8,63$$

eine Leistung von

$$N_e = M \cdot \omega = 1550 \text{ mkg} = 20,7 \text{ PS.}$$

Nun ist aber, wie sich aus den Versuchsdaten ergibt, die theoretische Leistung

$$N_{th} = 1763 \text{ mkg} = 23,5 \text{ PS,}$$

so daß die aus den Diagrammen bestimmte Leistung einen hydraulischen Wirkungsgrad ergäbe von

$$\varepsilon = \frac{20,7}{23,5} = 0,88.$$

Da nun schon allein der Leitradverlust $\rho_0 = 0,13$, der Austrittsverlust sich berechnet zu $\alpha_0 = 0,065$, so ist es, auch ohne Rücksicht auf den Laufradverlust klar, daß die oben angegebene Zahl für das Drehmoment auf einem rechnerischen oder meßtechnischem Irrtum beruhen muß. Letzterer dürfte wohl daher rühren, daß Pfarr das Wesen der Drucksenkungen an der Innenwand des Krümmers nicht richtig einschätzte und daher an dieser Seite der Schaufel bei der Extrapolation der Kurven zu niedrige Drücke einsetzte. Die vom Verfasser nach einem ähnlichen Verfahren aus den Diagrammen (Fig. 119 bis 126) ermittelten Drehmomente bzw. Wanddrücke (hier aber für die Absolutschaufel bestimmt) ergeben ein Gesamtmoment ($z = 20$ Schaufeln) von

$$M' = 7,86 \times 20 = 157,2 \text{ mkg}$$

bzw. mit

$$\omega' = \frac{\pi \cdot 81 \cdot 1}{30} = 8,5$$

eine Leistung von

$$N' = 1335 \text{ mkg} = 17,8 \text{ PS.}$$

woraus sich der Wirkungsgrad berechnet zu

$$\varepsilon' = \frac{17 \cdot 8}{23 \cdot 5} = 0,758.$$

Wir können nun die Energiebilanz der Turbine auch auf einem anderen Wege aufstellen, und zwar auf Grund der in unseren Diagrammen verzeichneten Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse.

Wie wir wissen, hat das Betriebswasser auf dem Wege vom Oberwasserkanal bis zum Leitradaustritte den Betrag $\varrho_0 H_n = 0,13 H_n$ durch Reibungs- und Wirbelverluste eingebüßt. Der Weg durch das Laufrad verzehrt

$$\varrho_1 \cdot H_n = 0,47 \frac{\omega(0)^2}{2g} = 0,193 H_n$$

der Austrittsverlust

$$\alpha_0 H_n = \frac{\omega_2'^2}{2g} = \frac{2,14^2}{19,6} = 235 \text{ mm} = 0,065 H_n,$$

so daß wir als Gesamtverlust erhalten

$$\varrho \cdot H_n = (\varrho_0 + \varrho_1 + \alpha_0) \cdot H_n = 0,388 H_n.$$

Andererseits aber haben wir durch die ungleiche Verteilung der Geschwindigkeit im Absolutkanale bzw. durch die damit begründete Druckverminderung an der Innenseite des Krümmers bzw. durch die gleichzeitige Druckerhöhung an der Außenseite des Krümmers einen Zuwachs an Drehmoment gegenüber dem bei verlustloser Strömung gewonnen. Es ist

$$h_v' = h_v + 0,025 \frac{\omega(0)^2}{2g}$$

$$h_r' = h_r - 0,34 \frac{\omega(0)^2}{2g}$$

bzw.

$$h_v' - h_r' = (h_v - h_r) + 0,365 \frac{\omega(0)^2}{2g} = (h_v - h_r) + 0,149 H_n.$$

Es ist demnach gerade so, als ob das Wasser mit einem um $0,149 H_n$ größeren Gefälle in die Turbine eingetreten wäre. Dieser Rückgewinn an Nutzgefälle vermindert den obigen Arbeitsverlust auf

$$\varrho' \cdot H_n = 0,388 H_n - 0,149 H_n = 0,239 H_n$$

so daß sich der hydraulische Wirkungsgrad ergibt aus

$$\varepsilon \cdot H_n = H_n - \varrho' \cdot H_n = 0,761 H_n$$

zu

$$\varepsilon = 0,761$$

— in guter Übereinstimmung mit der graphischen Ermittlung. Der totale Reibungs- und Wirbelungsverlust im Laufrade berechnet sich damit zu

$$\varrho_1' = 0,193 - 0,149 = 0,044.$$

Wäre der Absolutkanal ein erweiterter Krümmer nach der günstigsten Form (Fig. 105) gewesen, so wären die Verluste bei stoßfreiem Betrieb und gleichen Arbeitsverhältnissen wie oben

$$\begin{aligned} \varrho'' \cdot H_n &= (0,13 + 0,0246 + 0,065) H_n \\ &= 0,2186 H_n \end{aligned}$$

bzw. der hydraulische Wirkungsgrad

$$\varepsilon'' = 0,7814$$

demnach bloß um etwa 2% höher als der für die Versuchsturbine oben ermittelte.

Wir finden daher hier in Bestätigung unserer im theoretischen Teile gemachten Bemerkung, daß bei nicht zu großen Abweichungen vom stoßfreien Betriebe durch Verminderung der Füllung ($u = \text{konstant}$) der Wirkungsgrad der Turbine sich nur in sehr engen Grenzen ändert. Es liegt dies hauptsächlich an der Zunahme des Drehmomentes im Laufrade bei eingeschnürter Strömung. Innerhalb welcher Grenzen diese Betrachtung gilt, ist jedem Praktiker längst bekannt. Im übrigen erklärt diese Erscheinung auch den erstaunlichen Erfolg der bisher fast rein empirischen Entwicklung der Wasserturbinenräder. Man konnte offenbar innerhalb gewisser Grenzen gar nicht fehl gehen.

Die von den Theoretikern stets angestrebte wirbelfreie Strömung ist demnach in der Turbine nicht bloß aus hydrodynamischen Gründen unmöglich, sondern auch vom Standpunkte der Betriebsökonomie ohne Interesse.

Auffallend ist an der Versuchsturbine der hohe Reibungsverlust von $\varrho_0 = 0,13$ in der Zuleitung des Betriebswassers. Im Gegensatz zu den Verhältnissen im Laufrade ist hier der Verlust ein endgültiger, der überdies durch die dabei auftretenden vermehrten Druckdifferenzen zu beiden Seiten der Drehschaufeln

den Reguliervorgang schädlich beeinflusst. Für den Leitradkrümmer günstigster Form (Fig. 105) berechnet sich der Verlust in vorliegendem Falle zu etwa

$$\varrho_0' \cdot H_n = \frac{w(0)^2}{2g} \cdot \varrho_0'' = 0,03 \frac{w(0)^2}{2g} = \underline{0,012 H_n}$$

(da erfahrungsgemäß beim Strömen durch verengte Kanäle der Druckhöhenverlust bloß halb so groß ist als der beim Strömen durch erweiterte Kanäle), so daß mit einem Austrittsverluste von etwa $0,04 H_n$ für best angeordnete und konstruierte Turbinen ein günstigster hydraulischer Wirkungsgrad von

$$\underline{\varepsilon = (1 - 0,012 - 0,0246 - 0,04) = 0,9254}$$

und mit einem mechanischen bzw. Spaltverlust von zusammen etwa $0,03 H_n$ ein günstigster Gesamtwirkungsgrad von

$$\underline{\eta \sim 0,90}$$

zu erwarten wäre.

Da hierzu keine kostspieligen Werkstättenarbeiten, sondern bloß richtige Formgebung nötig erscheint, ist dieser Wirkungsgrad nicht bloß vom Standpunkte des Wasserkraftbesitzers, sondern auch von dem der Turbinenbauanstalt als ein durchaus wirtschaftlicher zu bezeichnen.

Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper

Beiträge zur Turbinentheorie

Von

W. KUCHARSKI, Ingenieur in Hamburg

III und 147 Seiten. 8°. Mit 61 Abbildungen
Preis gebunden M. 8.75

Das Buch stellt eine wertvolle Ergänzung der neueren Turbinenliteratur nach der theoretisch-hydrodynamischen Seite dar; es zeigt, wie die vorhandenen Schätze der Hydrodynamik „cum grano salis“ der Erkenntnis des Ingenieurs in einigen schwierigen Fragen dienstbar zu machen sind. Vor der großen Gefahr, dabei die mathematische Seite zu überschätzen, wird der Verfasser durch seine reiche Erfahrung an Turboformatoren, durch das Streben nach Anschaulichkeit und die Verwendung graphischer Darstellung und zahlreicher schöner Strombilder bewahrt. Das Buch darf daher des Beifalls der wissenschaftlich gebildeten und wissenschaftlich weiterstrebenden Ingenieure sicher sein.

Das technische Blatt (Frankfurter Zeitung).

Die Helmholtzsche Wirbeltheorie für Ingenieure

Bearbeitet von

Dr. phil. Dr.-Ing. h. c. G. BAUER

Direktor der Vulkan-Werke Hamburg und Stettin A.-G.

VI und 146 Seiten. 8°. Mit 58 Abbildungen
Preis geheftet M. 17.50

Zur Vertiefung in den Geist der bahnbrechenden Arbeiten Helmholtz', als befruchtende Quelle für die Problem-Lösungstätigkeit des Ingenieurs, sowie zur Belebung der Schaffensfreudigkeit auf dem fruchtbaren Gebiete der angewandten höheren Mathematik kann das Werk allen Ingenieuren wärmstens empfohlen werden.

Die Wasserkraft.

Die angegebenen Preise sind unverbindlich.

R. OLDENBOURG, MÜNCHEN UND BERLIN

Zur Dampfturbinentheorie

Verfahren zur Berechnung vielstufiger Dampfturbinen

Von Dr.-Ing. WILHELM DEINLEIN

VIII u. 106 Seiten. gr. 8°. Mit 51 Abbildungen. Geb. M. 8.—

Durch die klare zusammenfassende Behandlung der für die Turbinenkonstruktion wichtigsten Rechnungsgrundlagen ist das Buch ein wertvolles Hilfsmittel für Turbinenkonstruktoren und kann daher bestens empfohlen werden.

Werkstatt-Technik.

Thermodynamik der Turbomaschinen

Thermodynamische Bewertung und Berechnung der Dampfturbinen, Turbokompressoren, Turbokältemaschinen und Gasturbinen unter besond. Berücksichtig. graph. Verfahren

Von Dr.-Ing. GUIDO ZERKOWITZ

VIII u. 173 Seiten. 8°. Mit 89 Abb. und 1 Tafel. Geb. M. 13.—

Wegen seiner klaren Darstellung ist das vorliegende Werk besonders geeignet, Anfänger in das Wesen der thermodynamischen Vorgänge einzuführen; jedoch auch dem erfahrenen Ingenieur kann es wegen der vielen neuen Gedanken und Untersuchungen bestens empfohlen werden.

Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse des Dampfes in Freistrahlgrenzturbinen

Von Dr.-Ing. O. RECKE

VI u. 118 Seiten. 8°. Mit 67 Abb. und 3 Tafeln. Geh. M. 5.—

Der im praktischen Dampfmaschinenbau wohlbekannte Verfasser liefert in der vorliegenden Arbeit einen wertvollen rechnerischen Beitrag zur Bestimmung der Druckgeschwindigkeits- und Reibungsvorgänge des Treibmittels in Dampfturbinen.

Stahl und Eisen.

Die neueren Kraftmaschinen, ihre Kosten und ihre Verwendung

Für Betriebsleiter, Fabrikanten etc. sowie zum
Handgebrauch von Ingenieuren und Architekten

Herausgegeben von OTTO MARR, Zivilingenieur

IV u. 66 Seiten. gr. 8°. Mit 3 Abbildungen. Geh. M. 6.—

Alle Gesichtspunkte sind parteilos betrachtet, Vor- und Nachteile richtig abgeschätzt, so daß ein Ratgeber entstanden ist, zu dem jeder Interessent Vertrauen haben muß.

Deutsche Techniker-Zeitung.

Die angegebenen Preise sind unverbindlich.

R. OLDENBOURG, MÜNCHEN UND BERLIN